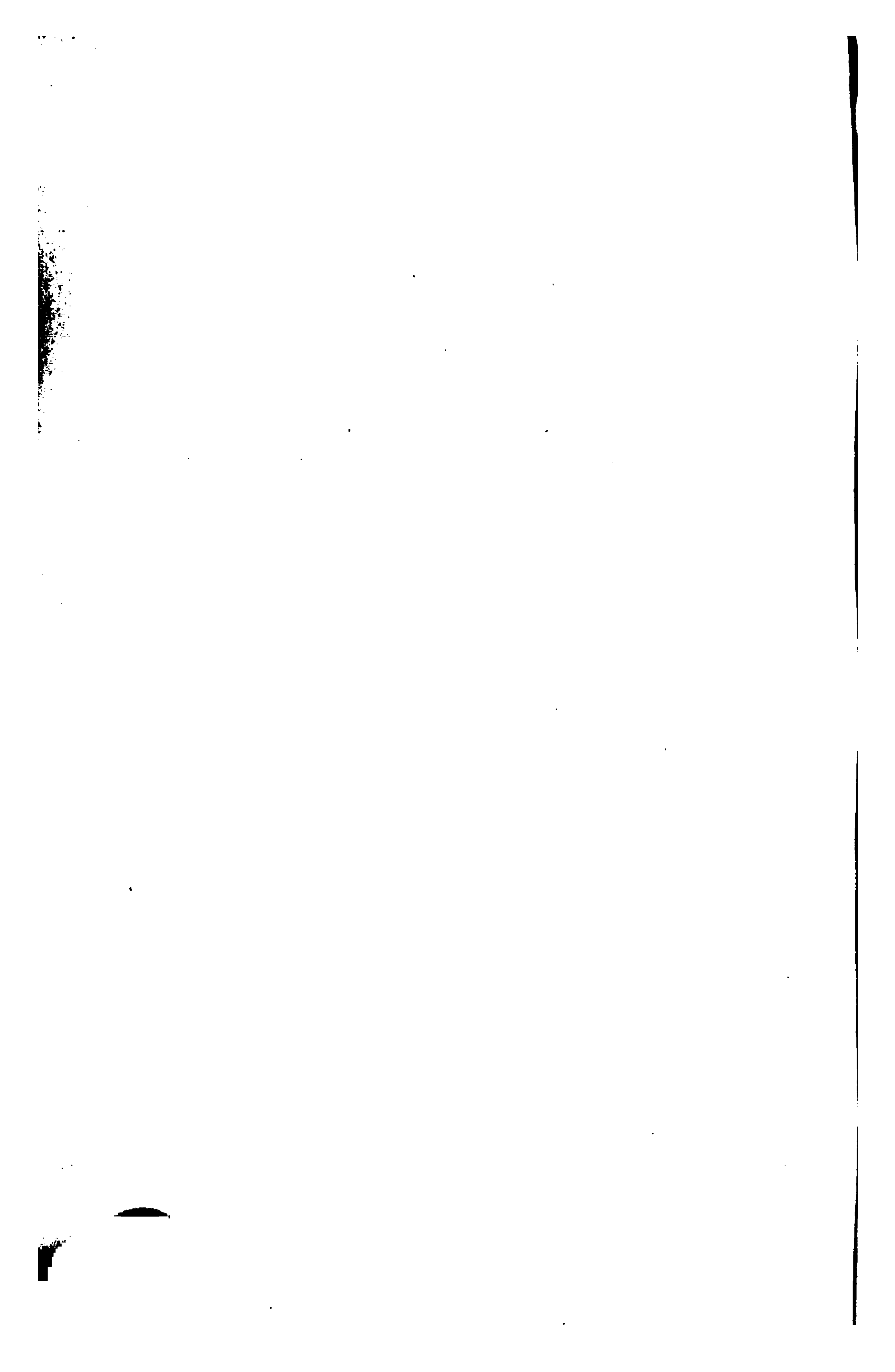



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922



16

SAMMLUNG

VON

AUFGABEN UND BEISPIELEN

AUS DER

TRIGONOMETRIE UND STEREOMETRIE

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FRIEDRICH REIDT,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM UND DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE IN HAMM.

I. THEIL: TRIGONOMETRIE.

ZWEITE AUFLAGE.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1877.

Vorwort.

In der vorliegenden Sammlung sind die Aufgaben in der Art geordnet, dass sie den Unterricht von seinen ersten Anfängen an gleichsam von Stunde zu Stunde begleiten, der Lehrer also für jede einzelne Stelle desselben den dahin passenden Uebungsstoff zusammengestellt findet und nicht genöthigt ist, das zur Belebung, Anwendung und Einübung der einzelnen Sätze dienliche Material sich mühsam zusammen zu suchen; auch ist keine für den systematischen Zusammenhang der Wissenschaft nothwendige Partie unberücksichtigt geblieben. In denjenigen Theilen, welche zufolge der genetischen Entwickelung des Unterrichts später auftreten, ist dabei auf eine möglichst vielseitige Wiederholung und Anwendung des Früheren Bedacht genommen. Endlich hat der Verfasser darauf verzichtet, überall da, wo sich zu einer Aufgabe verwandte, in ganz entsprechender Weise zu lösende bilden lassen, durch eine vollständige Heranziehung derselben die Masse des Materials auf Kosten der Vielseitigkeit des Inhalts zu vermehren, vielmehr nicht selten in solchen Fällen durch geeignete Andeutungen oder kürzere Angaben auch die Bildung weiterer Aufgaben dem Bereich der Uebungen zuzuweisen gesucht.

Die in diesen, der Vorrede zur ersten Auflage dieser Schrift entnommenen, Worten angegebenen Eigenthümlichkeiten sind, trotz mannichfacher Veränderungen im Einzelnen, auch in der neuen Auflage beider Theile bewahrt geblieben. Dem Verfasser ist auch in der Zwischenzeit kein dieselben Principien gleichmässig befolgendes ähnliches Werk bekannt geworden, und die freundliche Aufnahme, welche die vorliegende Schrift in vielen Kreisen gefunden hat, dürfte ausser der — nicht nach der blossen Nummernzahl zu schätzenden — Reichhaltigkeit wohl vorwiegend jenen Eigenthümlichkeiten zuzuschreiben sein.

Dass gleichwohl in der Zwischenzeit manche Stellen als der Verbesserung fähig und bedürftig erkannt wurden, ist selbstverständlich. Der Verfasser ist bestrebt gewesen, alle ihm durch Recensionen oder durch freundliche private Mittheilungen zugegangenen Bemerkungen neben eigenen Arbeiten im Interesse des Buches zu verwerthen und hofft deshalb die vorliegende Auflage als eine wesentlich verbesserte bezeichnen zu dürfen.

Eine völlige Umarbeitung erfuhren im trigonometrischen Theile die ausgeführten Zahlenbeispiele der Paragraphen 21 und 23, ferner die Aufgaben 1—5 des §. 26, in welchen statt der Seite a der Radius r des umbeschriebenen

Kreises als gegeben vorausgesetzt wurde, und endlich im Anschluss hieran namentlich der §. 27, welcher letztere einer systematischeren Behandlung und Anordnung bedurfte und ausserdem um 232 Aufgaben und eine Dreieckstafel vermehrt wurde. Auch wurde die den Aufgaben dieses §. vorausgeschickte Anleitung mit Rücksicht auf vorgekommene Missdeutung der den einzelnen Gruppen beigegebenen kurzen Notizen umgeändert und durch Ausführung auch der die Hilfsgrösse r benutzenden Methode — welche namentlich in der Sammlung trig. Aufgaben von Lieber und v. Lühmann eine ausgedehnte Anwendung gefunden hat — erweitert. Die jetzige Behandlungsweise dürfte allen billigen Ansprüchen genügen, und die Anzahl der aus dem betreffenden Uebungs-Gebiete ausgewählten (467) Aufgaben mehr als hinreichend sein, um für eine Reihe von Jahren im Unterricht mit denselben wechseln zu können. Dagegen konnte Verfasser sich nicht entschliessen, die Zahl der entsprechenden Vierecks-Aufgaben in ähnlicher Weise zu vermehren, da wohl nur besondere Liebhaberei denselben einen grösseren Theil der Zeit zum Opfer bringen wird. Auch die Anordnungsweise derselben konnte deshalb völlig unverändert bleiben, was um so mehr berechtigt erscheinen wird, als dieselbe auf wissenschaftlicher Grundlage beruht.

Es sind ferner zu den bisherigen Aufgaben, zum Theil behufs Ausfüllung kleinerer Lücken, neu hinzugekommen die Nummern §. 3, 17—22; §. 4, 78; §. 5 15**a**), **b**), 36, 43; §. 6, 35, 46—48, 67—74; §. 7, 10**c**); §. 8, 15**a**), 18—23; Anh. 1, 35**a**), **b**), 40, 41, 45—47; §. 11, 52, 53; §. 13, 5, 18; §. 15, 34; §. 19, 5, 11, 12; §. 20, 25; §. 25**b**) ganz; §. 28, 6, 34, 61; Anh. 5, 16, 25; Anh. 6, 31; §. 33, 7; §. 38, 6. Einzelne derselben sind neueren Programmen höherer Lehranstalten entnommen. Die früher durch das ganze Heft laufenden Nummern der Aufgaben wurden nach den einzelnen Paragraphen geordnet, um Veränderungen leichter möglich und in Zukunft weniger störend zu machen. Die früheren Nummern 76**b**), 127**a**), 369**b**), 414 wurden gestrichen, 128 und 253 an andere Stellen und ebenso der die Hilfswinkel behandelnde Anhang 4 der 1. Auflage als Anhang 3 an eine frühere Stelle gesetzt. Ausserdem sind vielfach kleinere Ungenauigkeiten des Ausdrucks oder der Schrift verbessert und ist der Gebrauch der Secanten und Cosecanten beschränkt worden.

Die Veränderungen im stereometrischen Theile sind in dem besonderen Vorwort zu demselben angegeben.

Für die ihm von verschiedenen Seiten zugegangenen fördernden Mittheilungen über diese Aufgaben-Sammlung sagt der Verfasser auch hier freundlichen Dank. Insbesondere hat demselben Herr Pfarrer Liss in Staude durch zahlreiche Bemerkungen eine schätzenswerthe Mithilfe geleistet.

Register.

A. Goniometrie.

B. Ebene Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

II. Das schiefwinkelige Dreieck.

C. Sphärische Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

Trigonometrische Aufgaben.

A. Goniometrie.

§. 1. Erklärung der trigonometrischen Functionen als Verhältnisszahlen.

In einem bei C rechtwinkeligen Dreieck ABC soll im Folgenden stets $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $CBA = \beta$ gesetzt werden.

1. Auf dem einen Schenkel AC eines Winkels BAC sind vom Scheitel aus die fünf Strecken $AD = DE = EF = FG = GH = 1$ abgetragen, und in den Endpunkten derselben sind auf jenem Schenkel Senkrechte bis zum anderen Schenkel errichtet; man berechne die Längen dieser Senkrechten, wenn die erste derselben gleich $\frac{3}{4}$ ist. Welches sind ferner die Werthe der Abstände der oberen Endpunkte dieser Perpendikel vom Scheitelpunkt?

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck sei die Hypotenuse gleich 5, die eine Kathete gleich 3; wie gross ist die Hypotenuse eines zweiten rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich $4\frac{1}{2}$ ist, wenn beide Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen, welche den gegebenen Katheten gegenüberliegen?

3. Drei rechtwinkelige Dreiecke haben denselben spitzen Winkel α, die Seiten des einen sind bezüglich $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$; man berechne die Verhältnisse je zweier Seiten in jedem der beiden anderen Dreiecke.

4. Die trigonometrischen Functionen des Winkels β eines rechtwinkeligen Dreiecks zu bestimmen, wenn die des anderen spitzen Winkels α gegeben sind.

5. Berechne die trigonometrischen Functionen von α, wenn a, b, c bezüglich gleich: **a)** 8, 15, 17; **b)** 40, 9, 41; **c)** 196, 315, 371; **d)** 176, 693, 715; **e)** 8; 3,9; 8,9; **f)** 5,6; 3,3; 6,5; **g)** 48; 3,1; 48,1; **h)** 17; 9,45; 19,45; **i)** 1,2; 3,91; 4,09; **k)** 1; 6,21; 6,29; **l)** 0,36; 0,319; 0,481; **m)** $\frac{4}{5}$, $6\frac{3}{8}$, $6\frac{17}{40}$; **n)** $\frac{51}{100}$, $\frac{253}{400}$, $\frac{13}{16}$;

o) 80, $260\frac{2}{3}$, $272\frac{2}{3}$; p) $21\frac{3}{5}$, 9, $23\frac{2}{5}$; q) 40, $25\frac{4}{11}$, $47\frac{4}{11}$ gegeben sind.

Welche Beziehung muss in jeder dieser Aufgaben zwischen den drei gegebenen Zahlen stattfinden, und ist dieselbe hier erfüllt?

6. Ebenso, wenn a, b, c bezüglich gleich a) p, q, r; b) pq, qr, rp; c) pqr, qrs, rsp; d) $p:q$, $q:r$, $r:s$; e) $(m+n):p$, $(n+p):q$, $(p+q):m$; f) $mn:pq$, $mr:sq$, $nr:ps$; g) $2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2; h) $2mn:(m-n)$, $m+n$, $(m^2+n^2):(m-n)$; i) $1:(m^2+n^2)$, $1:(m^2-n^2)$, $\sqrt{2(m^4+n^4)}:(m^4-n^4)$; k) $m:(m+n)$, $2m\sqrt{mn}:(m^2-n^2)$, $m:(m-n)$; l) $(p-q):p$, $2\sqrt{q:p}$, $(p+q):p$; m) $(m-n)^2$, $2\sqrt{mn}$, $(m+n)^2$ gegeben sind. Frage ähnlich, wie vorher.

7. Ebenso für a) $a=1$; $b=6{,}21$; b) $a=4{,}68$; $b=1{,}55$; c) $a=38$, $b=26{,}1$; d) $a=8$, $b=3{,}69$; e) $a=7{,}2$; $c=65$; f) $a=9$; $c=9{,}49$; g) $a=12$; $c=12{,}01$; h) $a=4$, $c=32\frac{1}{8}$; i) $b=4$; $c=40\frac{1}{10}$; k) $b=7$; $c=8{,}21$; l) $b=6$; $c=7{,}69$.

8. Ebenso für a) $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $b=\sqrt{2mn}$; b) $a=\sqrt{p^2-2pq}$, $b=q$; c) $a=\sqrt{p^2+pq}$, $c=p+q$; d) $a=p-q$, $b=p+q$; e) $a=n^2+mn$, $c=m^2+mn$, f) $b=p:q$, $c=p:r$; g) $b=pq:r$, $c=pr:q$; h) $c=m^2-mn$, $b=(m-n)\sqrt{m^2-n^2}$; i) $a=\sqrt{p^2(p^2+3q^2)+q^2(q^2-p^2)}$, $c=\sqrt{p^2(p^2+2q^2)+q^2(q^2+2p^2)}$.

9. Berechne (mit Hülfe eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen, eines gleichseitigen Dreiecks und mittelst der Theilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt) die vier ersten Functionen von 45^0, 30^0, 60^0, 72^0, 18^0.

10. Die Functionen des Winkels α in einem rechtwinkeligen Dreieck zu berechnen, in welchem a) $a=2b$; b) $a=\frac{2}{3}c$; c) $a+b=1\frac{1}{4}c$; d) $a-b=\frac{1}{m}c$ ist.

11. Die Functionen des Winkels α in einem rechtwinkeligen Dreieck zu berechnen, wenn gegeben sind a) die Kathete a und die Höhe h auf der Hypotenuse, b) die beiden durch die Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte, c) eine Kathete und die Projection der anderen Kathete auf die Hypotenuse, d) der Flächeninhalt F und die Hypotenuse.

12. Man berechne a) a aus $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $c=20{,}5$; b) b aus $c=3{,}5$, $\cos\alpha=0{,}44$; c) a aus $b=2\frac{5}{11}$, $\operatorname{tang}\alpha=3\frac{2}{3}$; d) c aus $a=0{,}021$,

$\sin \alpha = 0{,}552$; e) c aus $b = 12{,}71$; $\cos \alpha = 0{,}099$; f) b aus $a = 4{,}1235$, $\operatorname{tang} \alpha = 1{,}278285$.

13. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks aus dem Flächeninhalt gleich 12 □^{cm} und der Tangente eines Winkels gleich $1\frac{1}{2}$ zu berechnen.

14. Die nicht gegebenen Seiten und den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen aus a) $c = 1{,}45$, $\operatorname{tang} \alpha = 1{,}05$; b) $a = 24$, $\cos \alpha = 0{,}28$; c) $b = 117$, $\sin \alpha = 0{,}352$.

15. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind a) c und $\operatorname{tang} \alpha = m : n$; b) a und $\cos \alpha = p : q$; c) b und $\sin \alpha = 1 : p$.

16. Construire (mittelst des Transporteurs) Winkel von 5^0, $10^0, 15^0, 25^0, 35^0, 40^0, 50^0, 65^0$, bestimme durch Abmessen der nöthigen Längen (mittelst eines Transversal-Maassstabes) die Functionen derselben und gieb die Abweichungen der Resultate von den genaueren Werthen der folgenden Tabelle an. Woher rühren diese Fehler?

	sinus	cosin	tang	cotang		sinus	cosin	tang	cotang
5^0	0,087	0,996	0,087	11,430	35^0	0,574	0,819	0,700	1,428
10^0	0,174	0,985	0,176	5,671	40^0	0,643	0,766	0,839	1,192
15^0	0,259	0,966	0,268	3,732	50^0	0,766	0,643	1,192	0,839
25^0	0,423	0,906	0,466	2,145	65^0	0,906	0,423	2,145	0,466

17. Construire mit Hülfe der vorstehenden Tabelle und eines Transversal-Maassstabes Winkel von 5^0, 10^0, 15^0 u. s. w.

18. Bestimme mit Hülfe der vorstehenden Tabelle die Längen der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem $c = 1$, $\alpha = 5^0$ ist; ebenso die nicht gegebene Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks für $\alpha = 10^0$, $b = 1$, sowie für $\alpha = 15^0$, $a = 1$.

§. 2. Erklärung der trigonometrischen Functionen als Linien in einem Kreise mit dem Radius 1.

1. Beweise: Die Secante eines Winkels ist grösser als die Tangente, die Cosecante grösser als die Cotangente desselben*).

2. Construire einen Winkel, a) dessen Cosecante gleich 2 ist, b) dessen Cosinus gleich der Hälfte des Sinus ist, c) dessen Sinus gleich der Hälfte, einem Drittel, u. s. w., einem n^{tel} der Tangente ist.

*) Selbstverständlich im 1. Quadranten (vergl. §. 3); im Uebrigen gilt der Satz nur von den absoluten Längen der Linien.

3. Es sind zwei Winkel α, β gegeben; man construire die Ausdrücke: a) $\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha$; b) $\tang(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta) + \tang\alpha - \sin\alpha$.

4. Den Winkel α zu construiren, wenn für eine gegebene Einheit r eine Linie p gegeben ist gleich a) $\sin\alpha + \cos\alpha$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha$; c) $\tang\alpha + \sec\alpha$; d) $\sec\alpha - \tang\alpha$; e) $\cotg\alpha + \cosec\alpha$; f) $\cosec\alpha - \cotg\alpha$.

5. Bestimme α so, dass $\sin\alpha = \cos\alpha$ ist.

6. Wie gross muss α sein, damit $\sin\alpha$ gleich der Hälfte der Seite des in den Kreis beschriebenen regelmässigen n-Ecks ist?

7. Mit Hülfe eines in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vierecks, Sechsecks und Zehnecks die Sinus von 45^0, 30^0, 18^0 zu berechnen.

8. Zeige mittelst einer Construction, dass $2\sin\alpha > \sin 2\alpha$ ist.

9. Beweise: a) Der Sinus der Summe zweier spitzen Winkel ist kleiner als die Summe der Sinus der Summanden; b) die Tangente der Summe zweier spitzen Winkel ist grösser als die Summe der Tangenten der Summanden.

10. Gegeben sei ein Winkel α; man soll einen Winkel β construiren, so dass a) $\sin\beta = 2\sin\alpha$; b) $\cos\beta = \frac{1}{2}\cos\alpha$; c) $\tang\beta = 3\tang\alpha$ ist.

11. Beweise mit Hülfe einer Construction, dass für jeden (spitzen) Winkel α die Formel: a) $(\tang\alpha - \sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2 = (\sec\alpha - 1)^2$; b) $(\cosec\alpha - \sec\alpha)^2 = (1 - \tang\alpha)^2 + (\cotg\alpha - 1)^2$ gilt.

12. Der Sinus eines Winkels sei gleich a; wie gross würde die der Sinuslinie entsprechende Linie desselben Winkels sein, wenn der Radius des Kreises nicht gleich 1, sondern gleich r angenommen wäre? Ebenso für die übrigen Functionen.

13. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse gleich c und $\sin\alpha = m$, $\cos\alpha = n$ bekannt, man berechne die Katheten.

14. Für einen Kreis, dessen Radius gleich 1 ist, habe Jemand zu allen Centriwinkeln von Minute zu Minute die zugehörigen Sehnen berechnet und die Resultate in eine Tabelle niedergelegt. Wie kann der Besitzer einer solchen Sehnentafel mit ihrer Hülfe aus einem Centriwinkel α und dem Radius r eines beliebigen anderen Kreises a) die zugehörige Sehne, b) das zugehörige Segment berechnen?

15. Wie würde eine solche Sehnentafel zu verändern sein, damit aus derselben eine Tafel der Sinus werde?

16. In der Planimetrie wird gelehrt, dass aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite x des einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks durch die Formel $x = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$, die Seite y des umbeschriebenen regelmässigen n-Ecks durch die Formel $y = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$ berechnet werden könne. Welche trigonometrischen Formeln erhält man hieraus, wenn man den Centriwinkel des n-Ecks gleich 2α, den Radius $r = 1$ setzt und s, x und y durch trigonometrische Functionen ausdrückt?

§. 3. Functionen bei veränderlichen Winkeln und Winkeln höherer Quadranten.

1. Welche Functionen nehmen bei wachsendem Winkel im ersten Quadranten zu und im zweiten (ihrer absoluten Länge nach, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) ab?

2. Welche Functionen haben im zweiten Quadranten positive Werthe, welche im dritten, welche im vierten?

3. Welche Functionen haben für negative Winkel genau denselben Werth, wie die gleiche Function des entsprechenden positiven Winkels?

4. Für wie viele verschiedene Winkel ist, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, der Sinus gleich $\frac{5}{7}$?

5. Wie viele Werthe können dem Winkel α in $\cos\alpha = +\frac{2}{3}$ zukommen, wenn Winkel der vier Quadranten von 0 bis 360^0 in Betracht kommen, und in welchen Quadranten liegen sie?

6. Wie viele Werthe können dem Winkel α in $\sin\alpha = \frac{5}{7}$ zukommen, wenn nur Winkel unter 180^0 in Betracht kommen? Wieviel in $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, in $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{3}$, in $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, in $\operatorname{cotg}\alpha = -7$?

7. Welche Functionen eines Winkels eines Dreiecks bestimmen denselben unzweideutig, welche zweideutig?

8. Welche Functionen eines Dreieckswinkels können negativ sein, und in welchem Falle sind sie es?

9. Berechne die Ausdrücke: a) $a \cdot \sin 0^0 + b \cdot \cos 90^0 - c \cdot \operatorname{tang} 180^0$; b) $a \cdot \cos 90^0 - b \cdot \operatorname{tang} 180^0 + c \cdot \operatorname{cotg} 90^0$;

c) $a^2 \sin 90^0 + 2ab \cos 180^0 + b^2 : \cos 0^0$; d) $p . \sin 90^0 - q . \cos 360^0 + (p - q) \cos 180^0$; e) $(a^2 - b^2) \cos 360^0 - 4ab \sin 270^0$; f) $(m^2 - n^2) \operatorname{cotg} 270^0 + 2mn : \cos 180^0 - (m^2 + n^2) : \sin 270^0$; g) $7 . \sin 360^0 + 11 . \cos 270^0 + 21 . \operatorname{cotg} 0^0$; h) $\frac{x . \operatorname{tang} 0^0}{y . \cos 180^0} - \frac{y . \operatorname{cotg} 90^0}{x . \sin 270^0}$; i) $\frac{a \cos 0^0 - b \sec 180^0}{a \operatorname{cosec} 90^0 + b \operatorname{cosec} 270^0} + \frac{a \sec 360^0 - b \cos 360^0}{(a+b) \cos 0^0 - 2a \sin 180^0}$; k) $x^2 \sin(\alpha - \beta) - xy \cos(\alpha - \beta) + y^2 \operatorname{tang}(\alpha - \beta)$ für $\beta = \alpha$; l) $a^2 (a + 3b) \cos(\alpha - \beta) + 3ab (a + b) . \sin(\alpha - \beta) + b^2 (b + 3a) : \cos(\alpha - \beta)$ für $\alpha = \beta$; m) $m \cos(\alpha + \beta)$ für $\alpha = 90^0 - \beta$; n) $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \sin \alpha - (a - b)^2 \cos(90^0 - \alpha)$ für $\alpha = 90^0$; o) $\frac{a \sin \alpha}{\cos \beta} - b \cos \alpha - (a - b) \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha}$ für $\alpha = \beta = 180^0$.

10. Bestimme die Werthe von $\sin 450^0$, $\operatorname{tang} 540^0$, $\cos 630^0$, $\operatorname{cotg} 720^0$, $\sin 810^0$, $\operatorname{cosec} 900^0$.

11. Drücke folgende Functionen auf zweifache Art durch solche von Winkeln des ersten Quadranten aus:

1. sin 172°	6. sin 145°	11. tang 114° 58′
2. cos 100°	7. tang 99°	12. cos 132° 11′
3. tang 125°	8. sec 100°	13. cosec 99° 29′
4. cotg 95°	9. cosec 157°	14. sin 135° 12′
5. cos 179°	10. cotg 91°	15. cotg 139° 17′

16. sin 144° 9′ 33″	21. cos 96° 22′ 11″,4
17. tang 152° 48′ 7″	22. tang 96° 25′ 0″,7
18. cotg 169° 21′ 48″	23. sin 133° 49′ 21″,8
19. cos 104° 51′ 11″	24. cotg 121° 1′ 47″,6
20. sin 122° 22′ 17″	25. cos 127° 59′ 59″,9

26. cos 194°	29. sin 204° 12′	32. sec 344° 18′ 32″
27. tang 300°	30. cotg 264° 39′	33. tang 212° 48′ 44″
28. cosec 271°	31. sec 245° 19′	34. cos 274° 9′ 52″

35. sin 283° 49′ 32″	38. cotg 273° 51′ 19″,4
36. cosec 181° 1′ 1″	39. cos 195° 33′ 7″,7
37. tang 269° 15′ 15″	40. sin 189° 49′ 38″,1.

12. Vereinfache folgende Ausdrücke: a) $a \cos(90^0 - \alpha) + b \cos(90^0 + \alpha)$; b) $m \cos(90^0 - \alpha) \sin(90^0 - \alpha)$; c) $(a - b) \operatorname{tang}(90^0 - \alpha) + (a + b) \operatorname{cotg}(90^0 + \alpha)$;

d) $a^2+b^2-2ab\cos(180^0-\gamma)$; **e)** $a\sin[180^0-(\alpha+\beta)]:\sin\alpha$;
f) $\sin(90^0+\alpha).\cos(180^0-\beta)+\cos(90^0+\alpha).\sin(180^0-\beta)$;
g) $\cos(180^0+\alpha).\cos(270^0-\beta)-\sin(180^0+\alpha).\sin(270^0-\beta)$;
h) $\text{tang}\,\alpha+\text{tang}(-\beta)-\text{tang}(180^0+\beta)$;

i) $\dfrac{a\sin(180^0-\alpha)-b\sin(90^0-\alpha)}{a\,\text{tang}(90^0+\alpha)+b\,\text{tang}(90^0-\alpha)}$; **k)** $\dfrac{m^3\text{cotg}(180^0-\alpha)}{p^2q\cos(180^0-\alpha)}+\dfrac{pq^2\sin(90^0+\alpha)}{m^3\text{cotg}(90^0+\alpha)}$;

l) $\dfrac{n\sin\alpha.\text{tang}(180^0+\alpha)}{\text{tang}\,\alpha.\cos(90^0-\alpha)}$;

m) $\dfrac{(a^2-b^2)\,\text{cotg}(180^0-\alpha)}{\text{tang}(90^0-\alpha)}-\dfrac{(a^2+b^2)\,\text{tang}(90^0-\alpha)}{\text{cotg}(180^0-\alpha)}$;

n) $\dfrac{\sin(90^0+\alpha)\cos(90^0-\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)}+\dfrac{\sin(180^0-\alpha)\cos(90^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)}$;

o) $\dfrac{\text{tang}(180^0+\alpha)\sin(90^0+\alpha)\,\text{cotg}\,\alpha}{\sin(90^0-\alpha)\,\text{cotg}(270^0+\alpha)\,\text{tang}(180^0-\alpha)}$;

p) $\dfrac{\sin(270^0-\alpha)\,\text{tang}(180^0-\beta)}{\text{tang}(180^0+\beta)\cos(180^0-\alpha)}+\dfrac{\text{cotg}(90^0-\alpha)\sin(\gamma-90^0)}{\cos(180^0-\gamma)\,\text{tang}(-\alpha)}$;

q) $\dfrac{\text{tang}(90^0+\alpha)\cos(270^0-\alpha)\cos(-\alpha)}{\text{cotg}(180^0+\alpha)\sin(270^0+\alpha)}$;

r) $\dfrac{\text{tang}(270^0-\alpha)\,\text{cotg}(90^0+\alpha)}{\sin(270^0+\alpha)\,\text{cotg}(-\alpha)}+\dfrac{\sin(270^0+\alpha)\,\text{cotg}(270^0-\alpha)}{\text{cotg}(270^0+\alpha)}$.

13. Zu beweisen:

a) $\sin(450^0+\alpha)-\sin(270^0-\alpha)=$
$\sin(450^0-\alpha)-\sin(270^0+\alpha)$;

b) $\cos(90^0+\alpha).\cos(180^0-\alpha)+$
$\sin(90^0+\alpha).\sin(180^0+\alpha)=0$;

c) $\text{tang}(180^0-\alpha):\text{tang}(270^0-\alpha)=$
$\text{cotg}(90^0+\alpha):\text{cotg}(180^0+\alpha)$;

d) $[\sin(-\alpha)+\cos(-\alpha)]:[\text{tang}(-\alpha)-\text{cotg}(-\alpha)]$
$=[\sin(90^0+\alpha)+\cos(270^0-\alpha)]:[\text{cotg}(180^0+\alpha)$
$+\text{tang}(360^0-\alpha)]$;

e) $(a+b)^2:\cos(360^0-\alpha)+4ab:\sin(270^0-\alpha)$
$=(a-b)^2:\sin(90^0+\alpha)$;

f) $(a+b)m\sin\alpha+ac\cos(90^0+\alpha)=bc\sin(180^0-\alpha)$
$-a(m-c)\sin(180^0+\alpha)-b(m-c)\cos(270^0-\alpha)$;

g) $\dfrac{a^2\text{cotg}(180^0+\alpha)+b^2\text{tang}(90^0+\alpha)}{(a-b)\,\text{cotg}(180^0-\alpha)}=\dfrac{(a+b)\,\text{tang}(270^0-\alpha)}{\text{tang}(270^0+\alpha)}$.

14. Bestimme zu jeder der folgenden Functionen denjenigen Winkel eines höheren Quadranten, für welchen die gleiche Function denselben Werth hat: **a)** $\sin 12^0$; **b)** $\sin 84^0$; **c)** $\sin 38^0$;

d) $\cos 26^0$; e) $\operatorname{tang} 45^0$; f) $\operatorname{cotg} 72^0$; g) $\cos 120^0$; h) $\operatorname{tang} 91^0$; i) $\sin 191^0$; k) $\operatorname{cotg} 120^0\, 9'$; l) $\sin \alpha$.

15. In welchem Quadranten liegt ein Winkel a) dessen Sinus und Cosinus beide negativ sind, b) dessen Tangente und Cosinus negativ sind, c) dessen Cotangente positiv und dessen Sinus negativ ist?

16. a) Der Sinus eines Winkels, welcher den halben Quadranten um eben soviel übertrifft, als ihm selbst an 90^0 fehlt, ist gleich $\cos x$; wie gross ist x? b) Einem Winkel α fehlt an 45^0 eben soviel, als ein anderer β darüber hat; wenn nun $\log \sin \alpha = m$, $\log \operatorname{tang} \alpha = n$ ist, wie gross ist dann $\log \cos \beta$ und $\log \operatorname{cotg} \beta$? c) Gegeben $2a + b + c = 180^0$, $\log \cos \frac{1}{2}(b+c) = m$; gesucht $\log \sin a$.

17. Für welche Werthe von α ist $\sin \alpha + \cos \alpha$ positiv, für welche negativ? Man veranschauliche das Resultat durch eine Zeichnung, etwa indem man im Kreise die den negativen Werthen entsprechenden Sectoren schattirt.

18. Ebenso für $\sin \alpha - \cos \alpha$.

19. Ebenso für $(\sin \alpha - \cos \alpha) : (\sin \alpha + \cos \alpha)$. Wie kann man die hierfür entstehende Zeichnung aus den beiden vorigen ableiten?

20. In ähnlicher Weise können folgende Ausdrücke behandelt werden: $\operatorname{tang} \alpha \pm \sin \alpha$; $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$; $\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$; $\sec \alpha \pm \operatorname{tang} \alpha$, u. dgl. m.

21. Man beweise folgende Relationen unter der Voraussetzung, dass die Vorzeichen auf den rechten Seiten unbeachtet geblieben sind:

$\sin \alpha + \cos \alpha \geqq 1$; $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geqq 2$; $\operatorname{tang} \alpha^2 + \operatorname{cotg} \alpha^2 \geqq 2$.

22. Ebenso $\sin \alpha - \cos \alpha \leqq \sqrt{2}$; $\sin \alpha \,.\, \cos \alpha \leqq \frac{1}{2}$; $\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha \geqq 2$; $\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \geqq 2 (\sin \alpha - \cos \alpha)$.

§. 4. Beziehungen zwischen den Functionen desselben Winkels.

1. Die übrigen Functionen des spitzen Winkels α zu berechnen aus a) $\sin \alpha = 0{,}8$; b) $\operatorname{tang} \alpha = 2{,}4$; c) $\cos \alpha = 0{,}28$; d) $\operatorname{cotg} \alpha = 1{,}05$; e) $\sin \alpha = \frac{20}{101}$; f) $\sin \alpha = \frac{60}{229}$; g) $\cos \alpha = \frac{9}{41}$; h) $\cos \alpha = \frac{40}{401}$; i) $\operatorname{tang} \alpha = 8\frac{8}{17}$; k) $\operatorname{cotg} \alpha = 16\frac{16}{33}$.

2. Die übrigen Functionen des Winkels α zu berechnen aus a) $\sin\alpha = -0{,}352$; b) $\operatorname{tang}\alpha = -4{,}1066..$; c) $\cos\alpha = -0{,}2$; d) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; e) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; f) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}5$.

3. Ebenso aus a) $\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$; b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; c) $\sec\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2-q^2}}$; d) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{m+n}{m-n}$; e) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{a}$; f) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{n}$.

4. Verwandele folgende Ausdrücke in andere, welche nur $\sin\alpha$ enthalten: a) $\sin\alpha\cos\alpha^2 + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$; b) $\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha^2}$; c) $\operatorname{tang}\alpha^2 + 1 - \operatorname{cosec}\alpha^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; d) $\sec\alpha^2 - \operatorname{tang}\alpha^2 + \cos\alpha^2 - \operatorname{cotg}\alpha^2$.

5. Ebenso die folgenden in solche, welche nur $\cos\alpha$ enthalten:

a) $\frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}$; b) $\sec\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\alpha}$;

c) $\operatorname{cotg}\alpha^2 + \operatorname{tang}\alpha^2 - \sin\alpha^2 - \cos\alpha^2$; d) $\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{cotg}\alpha$.

6. Ebenso die folgenden in solche, welche nur $\operatorname{tang}\alpha$ enthalten: a) $\operatorname{cotg}\alpha + \sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$; b) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) + \operatorname{tang}\alpha(\operatorname{cotg}\alpha^2 - 1)$; c) $\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha\sin\alpha$; d) $(1-\sin\alpha\cos\alpha):(1+\sin\alpha\cos\alpha) - \operatorname{cotg}\alpha\sin\alpha$.

7. Ebenso durch $\operatorname{cotg}\alpha$ auszudrücken:

a) $1 + \operatorname{tang}\alpha - \sqrt{\sec\alpha^2 - 1}$;

b) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}} + \frac{\sqrt{1-\sin\alpha^2}\,.\,\operatorname{tang}\alpha}{1-\cos\alpha^2}\,.\,\cos\alpha$;

c) $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tang}\alpha^2 + \operatorname{cosec}\alpha^2 - 1$.

8. Ebenso durch $\sec\beta$: a) $1 + \operatorname{tang}\beta^2 - \operatorname{cotg}\beta^2$; b) $\cos\beta + \frac{\operatorname{tang}\beta\,.\,\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta^2}{\cos\beta}$; c) $\sin\beta\,.\,\cos\beta\,.\,\operatorname{cotg}\beta$.

9. Ebenso durch $\operatorname{cosec}\gamma$: a) $\sin\gamma + \cos\gamma$; b) $\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{cotg}\gamma$; c) $\sec\gamma + \cos\gamma + \operatorname{tang}\gamma$.

10. Berechne die Functionen des Winkels x, für welchen a) $9\sin x^2 + 27\sin x = 10$; b) $\cos x = 2 - 3\cos x^2$; c) $(2\operatorname{tang}x + 1):(2\operatorname{tang}x - 1) + (2\operatorname{tang}x - 1):(2\operatorname{tang}x + 1) = 3\frac{1}{3}$;

d) $2:\cotg x + \cotg x:2 = 2\cotg x$; e) $(625\sin x + 98)\sin x = 527$; f) $20\tang x(\tang x - 1) = 8(\tang x - 1) - 1$; g) $(\cos x - 2):(\cos x - 4) = \cos x + \frac{4}{35}$; h) $(3:\cos x - 4)^2 - (1 - 1:\cos x)^2 = 3$ ist.

11. a) Der Cosinus eines Winkels verhält sich zu seinem Sinus wie 9 zu 40. Wie gross sind beide? b) Wieviel beträgt der Sinus eines Winkels, dessen Tangente sich zu seiner Cotangente wie 1 zu 4 verhält?

Die Richtigkeit der folgenden Formeln zu beweisen:

Anleitung: Man forme eine Seite der Gleichung um, indem man die in ihr vorkommenden Functionen auf eine möglichst einfache Weise durch solche der anderen Seite auszudrücken sucht, oder man nehme auf beiden Seiten derartige Umformungen vor, indem man sie durch dieselben Functionen auszudrücken sucht, bis man beiderseits denselben Ausdruck erhält.

Beispiel. Zu beweisen: $\frac{\cos\alpha + \cotg\alpha}{\cos\alpha - \cotg\alpha} = \frac{\tang\alpha + \sec\alpha}{\tang\alpha - \sec\alpha}$.

a) Man setze auf der linken Seite $\cos\alpha = 1:\sec\alpha$, $\cotg\alpha = 1:\tang\alpha$ und erweitere dann mit $\sec\alpha \,.\, \tang\alpha$. *b)* Man setze rechts $\tang\alpha = 1:\cotg\alpha$, $\sec\alpha = 1:\cos\alpha$ und erweitere dann mit $\cos\alpha \,.\, \cotg\alpha$. *c)* Man drücke zunächst $\tang\alpha$ und $\cotg\alpha$ durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus, erweitere links mit $\sin\alpha$ und dividire Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$; auf der rechten Seite erweitere man mit $\cos\alpha$. Beide Seiten werden dann gleich $\frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha - 1}$.

Anwendung von $\sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = 1$, etc.

12. a) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha \,.\, \sec\alpha + 1$;

b) $\frac{\sin\beta + \tang\beta}{\tang\beta} = \sin\beta \,.\, \cotg\beta + 1$.

13. a) $\frac{\sin\gamma + \cos\gamma}{\sec\gamma + \operatorname{cosec}\gamma} = \sin\gamma \,.\, \cos\gamma$;

b) $\frac{\sin\delta + \tang\delta}{\cotg\delta + \operatorname{cosec}\delta} = \sin\delta \,.\, \tang\delta$;

c) $\frac{\sin\varepsilon + \cotg\varepsilon}{\tang\varepsilon + \operatorname{cosec}\varepsilon} = \sin\varepsilon \,.\, \cotg\varepsilon$.

14. a) $\frac{\cos x + \sec x}{\cos x - \sec x} = \frac{\cos x^2 + 1}{\cos x^2 - 1}$;

b) $\frac{\tang x + \cotg x^2}{\tang x - \cotg x^2} = \frac{\tang x^3 + 1}{\tang x^3 - 1}$.

15. a) $\sin y^2 = \frac{1 + \sin y^4}{\sin y^2 + \operatorname{cosec} y^2} = \frac{\sin y^4 - 1}{\sin y^2 - \operatorname{cosec} y^2}$;

b) $\tang y^2 = \frac{1 + \tang y^4}{\tang y^2 + \cotg y^2} = \frac{\tang y^4 - 1}{\tang y^2 - \cotg y^2}$.

16. $\sin z^2 \,.\, \tang z^2 = (\sin z^2 + \tang z^2):(\cotg z^2 + \operatorname{cosec} z^2)$.

17. $\left(\frac{\sin\beta + \tang\beta}{\operatorname{cosec}\beta + \cotg\beta}\right)^2 = \frac{\sin\beta^2 + \tang\beta^2}{\operatorname{cosec}\beta^2 + \cotg\beta^2}$.

18. $(\sin\gamma + \cos\gamma + \operatorname{tang}\gamma) : \sin\gamma \,.\, \cos\gamma \,.\, \operatorname{tang}\gamma$
$= \sec\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cosec}\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \sec\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\gamma$.

19. $\dfrac{1+\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \dfrac{1+\sec\varphi}{1+\operatorname{cosec}\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\sec\varphi}{\operatorname{cosec}\varphi}$.

20. $\dfrac{1+\sin\lambda}{1-\sin\lambda} = \dfrac{\operatorname{cosec}\lambda + 1}{\operatorname{cosec}\lambda - 1}$.

Anmerkung. Zu jeder der Formeln 12—20 lassen sich leicht andere, analoge bilden. Die Aufsuchung derselben kann hier, wie auch in späteren Fällen, zur Uebung dienen.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

21. a) $\operatorname{tang}\mu = \sec\mu : \operatorname{cosec}\mu$; b) $\operatorname{cotg}\mu = \operatorname{cosec}\mu : \sec\mu$.

22. a) $\sec\psi \pm \operatorname{cosec}\psi = (\operatorname{tang}\psi \pm 1) : \sin\psi$;
b) $\sin\psi + \cos\psi = (1 + \operatorname{tang}\psi) : \sec\psi$.

23. $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma$
$= (1 + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\beta \,.\, \operatorname{tang}\gamma) \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma$.

24. $\operatorname{tang}\delta = 1 : \left\{\dfrac{\sin\delta + \cos\delta}{\sin\delta} - 1\right\}$.

25. $1 + \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} x^2 = (\sin x^2 + \sin x \cos x + \cos x^2) : \cos x^2$.

26. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\operatorname{tang} x + 1}{\operatorname{tang} x - 1} = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$.

27. $(\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2) : (\sin\alpha \,.\, \cos\alpha) = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha$.

28. $(1 + \operatorname{tang}\beta)(1 + \operatorname{cotg}\beta) = (\sin\beta + \cos\beta)^2 : (\sin\beta \,.\, \cos\beta)$.

29. $(1 + \operatorname{tang}\gamma)\cos\gamma^2 = (\cos\gamma^2 - \sin\gamma^2) : (1 - \operatorname{tang}\gamma)$.

30. $(\sec\vartheta \operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cosec}\vartheta \operatorname{tang}\vartheta) : (\cos\vartheta - \sin\vartheta)$
$= \operatorname{cosec}\vartheta \sec\vartheta$.

$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$.

31. a) $\sin\alpha = \sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}$;
b) $\cos\alpha = \sqrt{(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)}$.

32. a) $\operatorname{tang}\beta = \sqrt{(1 - \cos\beta^2) : (1 - \sin\beta^2)}$;
b) $\operatorname{cotg}\beta = \sqrt{(1 - \sin\beta^2) : (1 - \cos\beta^2)}$.

33. a) $\sin\gamma = \sqrt{(\sec\gamma^2 - 1) : (1 + \operatorname{tang}\gamma^2)}$;
b) $\cos\gamma = \sqrt{(\operatorname{cosec}\gamma^2 - 1)(\operatorname{cotg}\gamma^2 + 1)}$.

34. a) $\sec\delta = \sqrt{(1 + \operatorname{cotg}\delta^2) : (\operatorname{cosec}\delta^2 - 1)}$.
b) $\operatorname{cosec}\delta = \sqrt{(1 + \operatorname{tang}\delta^2) : (\sec\delta^2 - 1)}$.

35. $\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{1 - 2\cos\varphi^2}{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi}$.

36. $\operatorname{tang} x = \sin x^3 : (\cos x - \cos x^3)$.

37. $\sin y^2 + \operatorname{tang} y^2 = (1 - \cos y^4) : \cos y^2$.

38. a) $\sin z : (1 - \cos z) = (1 + \cos z) : \sin z$;
b) $(\sec z - 1) : \operatorname{tang} z = \operatorname{tang} z : (\sec z + 1)$;
c) $(\operatorname{cosec} z - 1) : \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} z : (\operatorname{cosec} z + 1)$.

39. $\operatorname{tang} v + \operatorname{cotg} v = \cot v : \cos v^2$.

40. $\operatorname{tang} \vartheta \,.\, \sec \vartheta \,.\, \operatorname{cosec} \vartheta^2 - \operatorname{tang} \vartheta \,.\, \sec \vartheta = \operatorname{cosec} \vartheta$.

41. a) $\sin k^2 + \operatorname{tang} k^2 = \sec k^2 - \cos k^2$;
b) $\sin k^2 + \operatorname{cotg} k^2 = \operatorname{cosec} k^2 - \cos k^2$;
c) $\operatorname{tang} k^2 - \operatorname{cotg} k^2 = \sec k^2 - \operatorname{cosec} k^2$.

42. a) $\sin \alpha^2 + \sec \alpha^2 = (1 + \cos \alpha^2 - \cos \alpha^4) : (1 - \sin \alpha^2)$;
b) $\sin \alpha^2 + \operatorname{cosec} \alpha^2 = (1 + \sin \alpha^4) : \sin \alpha^2$.

43. a) $(\sin \beta + \operatorname{cotg} \beta)^2 = (1 + 2 \cos \beta - \cos \beta^2 - 2 \cos \beta^3 + \cos \beta^4) : \sin \beta^2$;
b) $(\sin \beta - \operatorname{cotg} \beta)^2 = (1 - 2 \cos \beta - \cos \beta^2 + 2 \cos \beta^3 + \cos \beta^4) : \sin \beta^2$;
c) $(\cos \beta + \operatorname{tang} \beta)^2 = (1 + 2 \sin \beta - \sin \beta^2 - 2 \sin \beta^3 + \sin \beta^4) : \cos \beta^2$;
d) $(\cos \beta - \operatorname{tang} \beta)^2 = (1 - 2 \sin \beta - \sin \beta^2 + 2 \sin \beta^3 + \sin \beta^4) : \cos \beta^2$.

44. a) $(\sin \gamma + \operatorname{cotg} \gamma)^2 + (\sin \gamma - \operatorname{cotg} \gamma)^2 = 2\,(1 - \cos \gamma^2 + \cos \gamma^4) : \sin \gamma^2$;
b) $(\sin \gamma + \operatorname{cotg} \gamma)^2 - (\sin \gamma - \operatorname{cotg} \gamma)^2 = 4\,(\cos \gamma - \cos \gamma^3) : \sin \gamma^2 = 4 \cos \gamma$.

45. $\operatorname{cosec} \delta^2 + \sec \delta^2 = (\operatorname{tang} \delta + \operatorname{cotg} \delta)^2 = \sec \delta^2 \operatorname{cosec} \delta^2$.

46. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

47. a) $\sec x - \cos x = \sin x \,.\, \operatorname{tang} x$;
b) $\operatorname{cosec} x - \sin x = \cos x \,.\, \operatorname{cotg} x$.

48. a) $2 \sin \gamma + 2 \cos \gamma + \sec \gamma + \operatorname{cosec} \gamma = (\sin \gamma + \cos \gamma)^3 : \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$;
b) $2 \cos \gamma - 2 \sin \gamma + \sec \gamma - \operatorname{cosec} \gamma = (\sin \gamma - \cos \gamma)^3 : \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$.

49. a) $4 \cos \gamma + 2 \sec \gamma = [(\sin \gamma + \cos \gamma)^3 + (\sin \gamma - \cos \gamma)^3] : \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$;
b) $4 \sin \gamma + 2 \operatorname{cosec} \gamma = [(\sin \gamma + \cos \gamma)^3 - (\sin \gamma - \cos \gamma)^3] : \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$.

50. a) $\frac{\sin\vartheta+\cos\vartheta}{\sin\vartheta-\cos\vartheta}=\frac{\sec\vartheta+\operatorname{cosec}\vartheta}{\sec\vartheta-\operatorname{cosec}\vartheta}$;

b) $\frac{\sin\vartheta+\operatorname{tang}\vartheta}{\sin\vartheta-\operatorname{tang}\vartheta}=\frac{\operatorname{cotg}\vartheta+\operatorname{cosec}\vartheta}{\operatorname{cotg}\vartheta-\operatorname{cosec}\vartheta}$.

51. $\sin\lambda+\cos\lambda=\pm\sqrt{1+2:(\operatorname{tang}\lambda+\operatorname{cotg}\lambda)}$,
positiv, wenn λ zwischen -45^0 und 135^0, negativ, wenn λ zwischen 135^0 und 315^0 liegt.

52. $(\sin a+\operatorname{tang}a).(\cos a+\operatorname{cotg}a)=(1+\sin a).(1+\cos a)$.

53. $(\sin a+\cos a).(\sec a+\operatorname{cosec}a)=2+\operatorname{tang}a+\operatorname{cotg}a$.

54. $\frac{1+\sec\beta}{1+\operatorname{cosec}\beta}=\operatorname{tang}\beta\,.\,\frac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

55. $\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{\operatorname{tang}x\,.\sec y+\sec x\,.\operatorname{tang}y}{\sec x+\sec y}$.

56. $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{\operatorname{tang}x\,.\sec y+\sec x\,.\operatorname{tang}y}{\operatorname{tang}x\,.\sec y-\sec x\,.\operatorname{tang}y}$.

57. $\frac{\operatorname{tang}z}{1-\operatorname{tang}z^2}\,.\,\frac{\operatorname{cotg}z^2-1}{\operatorname{cotg}z}=1$.

---

58. a) $\overline{\operatorname{tang}(90^0+\alpha)}^2-\overline{\operatorname{cotg}(90^0+\alpha)}^2=\operatorname{cosec}\alpha^2-\sec\alpha^2$; $90^0+\alpha$ u. s. w.
b) $\operatorname{tang}(180^0+\beta):\sin(180^0-\beta)+\operatorname{cosec}(270^0-\beta)=0$;
c) $\cos(180^0-\gamma)\,.\sin(180^0+\gamma)\,.\operatorname{tang}(90^0-\gamma)-\cos(90^0-\gamma)\,.\cos(90^0+\gamma)=1$;
d) $\operatorname{cotg}(180^0+\alpha)\,.\cos(270^0-\alpha):\cos(360^0-\alpha)+\cos(90^0-\alpha)\,.\sin(180^0-\alpha)-\cos(180^0+\alpha)\,.\sin(90^0-\alpha)=0$;
e) $\overline{\sin(180^0-\alpha)}^2+\overline{\sin(90^0+\alpha)}^2=\overline{\sec(360^0-\alpha)}^2-\overline{\operatorname{cotg}(270^0-\alpha)}^2$.

59. Zu berechnen a) aus $\sin 15^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ die Functionen von 105^0; b) aus $\operatorname{cotg}(45^0+\alpha)=p$ die $\operatorname{cotg}(45^0-\alpha)$; c) aus $\alpha+2\beta+2\gamma=180^0$, $\cos(\beta+\gamma)=q$ den $\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

Anleitung: Die nachstehenden Gleichungen enthalten nicht die Unbekannte x selbst, sondern trigonometrische Functionen derselben, und können daher auch nicht unmittelbar auf x aufgelöst werden. Da aber jeder Winkel oder Bogen im Allgemeinen bestimmt ist, sobald man nur den Werth einer Function desselben weiss, und wir später ein Mittel kennen lernen werden, um aus diesem Werth den Bogen selbst finden zu können (Aufschlagen in den trig. Tafeln), so genügt es, statt x selbst eine solche Function als die gesuchte Unbekannte zu behandeln. Die nachstehenden Gleichungen liefern, sofern sie bestimmte Zahlenbeispiele sind, meist solche Werthe, für welche sich die zugehörigen Winkel leicht durch einfache geometrische Betrachtungen ergeben.

Enthält eine Gleichung mehrere Functionen desselben unbekannten Winkels, so hat man sie zunächst so umzuformen, dass man eine Glei-

chung mit nur einer Function desselben bekommt. Entweder wählt man unter den vorhandenen Functionen eine und drückt alle übrigen durch diese aus, oder man führt eine neue Function ein, auf welche man alle vorhandenen bezieht.

Es sei z. B. die Gleichung $3 \operatorname{tang} x = 2 \cos x$ aufzulösen, so kann man 1) $\operatorname{tang} x$ durch $\cos x$, oder 2) $\cos x$ durch $\operatorname{tang} x$ ausdrücken, oder man führt etwa 3) $\sin x$ ein, indem man aus $3 \sin x : \cos x = 2 \cos x$ die neue Gleichung $3 \sin x = 2 \cos x^2$ oder $3 \sin x = 2 - 2 \sin x^2$ bildet. Aus letzterer erhält man dann leicht $\sin x = \frac{1}{2}$ und $\sin x = -2$. Von diesen beiden Werthen ist der letztere unmöglich. Der Anschein, als ob so eine mathematisch richtige Entwickelung zu einer sinnlosen Folgerung führen könne, hebt sich durch folgende Betrachtung: Indem in der Gleichung $3 \sin x = 2 - 2 \sin x^2$ die Grösse $\sin x$ als Unbekannte betrachtet und die Gleichung auf diese aufgelöst wurde, ist von der in der Natur des Sinus liegenden Bedingung, dass sein absoluter Werth kleiner als 1 sei, vollständig abgesehen worden. Setzt man wirklich statt $\sin x$ etwa y ein, so sieht man sofort, dass die Gleichung $3y = 2 - 2y^2$, welche hier aufgelöst worden ist, die zwei Wurzeln $y = \frac{1}{2}$ und $y = -2$ hat, indem die Bedingung $y < 1$ und $y > -1$ in diese Gleichung nicht aufgenommen ist. Dieselbe muss also noch nachträglich erfüllt werden. Es ergiebt sich somit allgemein die Nothwendigkeit, die bei dem Auflösen einer solchen trigonometrischen Gleichung erhaltenen Wurzelwerthe auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. — Man hat nun noch für die obige Gleichung die einzige Auflösung $\sin x = \frac{1}{2}$, und man weiss, dass $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ist. Da aber hieraus nicht nothwendig folgt, dass auch umgekehrt jeder Winkel, dessen Sinus $\frac{1}{2}$ ist, gleich 30^0 sein müsse, so erfährt man hierdurch nur, dass $x = 30^0$ sein kann, hat aber noch zu untersuchen, ob nicht noch ausserdem Winkel existiren, deren Sinus ebenfalls gleich $\frac{1}{2}$ sind. Da nun bekannt ist, dass zu einem positiven Sinus stets zwei Winkel, welche sich zu 180^0 ergänzen, ausser diesen aber keine weiteren in den 4 Quadranten gehören, so hat man als zweite Auflösung $x = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Man kann endlich den Begriff des Winkels derart ausdehnen, dass man von Winkeln redet, welche mehr als einer Umdrehung entsprechen, und von negativen Winkeln, und man sieht ein, dass dann alle diejenigen Winkel mit irgend einem gegebenen dieselben Functionen haben, welche durch Addition von 360^0 oder einem Vielfachen von 360^0 zu diesem entstehen. Daher ist für das vorliegende Beispiel $x = 30^0 \pm n \,.\, 360^0$, $x_1 = 150^0 \pm n \,.\, 360^0$, wo $n = 0$ oder gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist. Allgemein ergiebt sich daraus, dass zu jedem bei Auflösung einer solchen trigonometrischen Gleichung gefundenen Functionen-Werth unzählig viele Winkel gehören. (Transscendente Gleichungen haben unzählig viele Wurzeln.) Von diesen liegen nur 2 in einem der vier ersten Quadranten; dieselben sind die Haupt-Auflösungen.

Als ein zweites Beispiel diene die in den Anwendungen der Trigonometrie häufig vorkommende Gleichung

$$a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x = c.$$

Wollte man hier $\cos x$ durch $\sin x$ ausdrücken, so würde man aus $b \,.\, \cos x = c - a \,.\, \sin x$ durch Quadriren beider Seiten und die Substitution $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$ eine quadratische Gleichung für $\sin x$ und durch Auflösen derselben

$$\sin x = \frac{a c \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

erhalten. Dieses Resultat liefert zwei Werthe für $\sin x$, von denen jedoch nur einer der gegebenen Gleichung genügt. Dies rührt daher, dass durch das Quadriren die Anzahl der Wurzeln der Gleichung verdoppelt wird, denn da $b^2 \,.\, \cos x^2$ nicht nur das

Quadrat von $+b \,.\, \cos x$, sondern auch das Quadrat von $-b \,.\, \cos x$ ist, so würde man durch dasselbe Verfahren aus der entsprechenden Gleichung

$$a \,.\, \sin x - b \cos x = c$$

dieselben Resultate gewinnen. Die vorstehende Formel für $\sin x$ giebt also ausser der Auflösung der gegebenen auch die der letzteren Gleichung, und es wäre daher noch zu untersuchen, welcher Werth der einen und welcher der anderen Gleichung zukommt.

Ganz entsprechend würden Verfahren und Resultat sein, wenn man in der gegebenen Gleichung $\sin x$ durch $\cos x$ ausdrücken wollte. Dieser Fall, dass sich zwei Auflösungsweisen darbieten, von welchen keine vor der anderen einen Vorzug besitzt, so dass die Wahl zwischen denselben nicht auf wissenschaftlichen Gründen, sondern auf Willkür beruhen würde, lässt schon vermuthen, dass es einen besseren Weg geben müsse, dass es also vortheilhafter sein werde, beide vorkommenden Functionen durch dieselbe dritte auszudrücken. Greifen wir in dieser allgemeineren Anleitung über den unmittelbaren Gegenstand dieses Paragraphen hinaus, so finden wir aus den für §. 6 geltenden Formeln die hier brauchbaren Gleichungen

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x^2},$$

deren Substitution in die gegebene Gleichung zu

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{2a}{b+c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{b-c}{b+c},$$

also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c},$$

führt. Diese Formel liefert zwar auch zwei Werthe für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, aber während die frühere, wenn wir uns auf die Winkel zwischen 0° und 360° für x beschränken, zu jedem der beiden Werthe des $\sin x$ zwei, im Ganzen also vier Winkel ergeben würde, muss hier $\frac{1}{2} x$ zwischen 0° und 180° gesucht werden, und man erhält daher hier für jeden Werth der Tangente nur einen, im Ganzen also nur die zwei wirklich richtigen Auflösungen.

Man kann sich endlich auch in diesem Fall, wie in vielen anderen, mit Vortheil der sogenannten Hilfswinkel bedienen, welche zuweilen für logarithmische Rechnungen einige Bequemlichkeit bieten, wenngleich der praktische Werth derselben vielfach sehr überschätzt worden ist. Der Vollständigkeit halber möge der Gegenstand, für welchen sich im Anhang 3 noch weitere Beispiele finden, auch hier schon kurz erwähnt werden. Da der Sinus und der Cosinus eines Winkels jeden Werth zwischen 0 und $+1$, bezw. 0 und -1, die Tangente und die Cotangente überhaupt jeden reellen Werth, die Secante und die Cosecante jeden Werth zwischen $+1$ und $+\infty$, bezw. -1 und $-\infty$ haben kann, so kann umgekehrt jede reelle Zahl gleich der Tangente oder der Cotangente, oder, wenn ihr absoluter Werth nicht grösser als 1 ist, gleich dem Sinus oder dem Cosinus und wenn derselbe nicht kleiner als 1 ist, gleich der Secante oder der Cosecante eines Hilfswinkels gesetzt werden. Sind ferner zwei beliebige reelle Zahlen a, b gegeben, so kann man stets eine reelle Zahl m und einen Winkel φ so bestimmen, dass $a = m \,.\, \cos \varphi$, $b = m \,.\, \sin \varphi$ ist. Durch Division ergiebt sich nämlich $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, womit sich dann $m = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}$ bestimmt. Auch kann man $a^2 + b^2 = m^2 (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2) = m^2$, also $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ setzen.

Wenden wir diese letztere Substitution auf die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c$$

an, so ergiebt sich

$$m(\sin x \,.\, \cos \varphi + \cos x \,.\, \sin \varphi) = c,$$

oder

$$m \,.\, \sin(x+\varphi) = c; \qquad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{m}.$$

Zur Auflösung der obigen Gleichung berechne man also zunächst φ aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

und sodann x aus

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c \,.\, \cos\varphi}{a} = \frac{c \,.\, \sin\varphi}{b}, \quad \text{oder } \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

a. Gleichungen ersten Grades oder rein quadratische, mit einer Unbekannten.

60. $\sin x^2 + \sin a^2 = 1$. 61. $\sin x = -\cos x$. 62. $\sin x \,.\, \operatorname{cotg} x = a$. 63. $\operatorname{tang} x : \operatorname{cotg} x = b$. 64. $\sin x : \cos x = c$. 65. $a \sin x^2 + b \cos x^2 = c$. 66. $a \sin x = b \cos x$, $a = b$. 67. $a \sin x = b : \sin x$. 68. $a \sin x = b \operatorname{tang} x$, $a = 2b$.

69. a) $a(\sin x + \operatorname{tang} x) = b(\operatorname{tang} x - \sin x)$, $a = 1$, $b = 5 + 2\sqrt{5}$;
    b) $a(\cos x + \operatorname{cotg} x) = b(\operatorname{cotg} x - \cos x)$, $a = 1$, $b = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

70. a) $a(\sin x + \operatorname{tang} x) = b(1 + \cos x)$; $a = b$.
    b) $a(\operatorname{tang} x - \sin x) = b(1 - \cos x)$; $a = b$.
    c) $a(\cos x + \operatorname{cotg} x) = b(1 + \sin x)$; $a = b$.
    d) $a(\operatorname{cotg} x - \cos x) = b(1 - \sin x)$; $a = b$.

71. a) $a(\sin x + \operatorname{tang} x) = b(1 + \cos x) : \cos x$, $a = b$.
    b) $a(\operatorname{tang} x - \sin x) = b(1 - \cos x) : \cos x$, $a = b$.
    c) $a(\cos x + \operatorname{cotg} x) = b(1 + \sin x) : \sin x$, $a = b$.
    d) $a(\operatorname{cotg} x - \cos x) = b(1 - \sin x) : \sin x$, $a = b$.

72. a) $a \,.\, (\sin x + \operatorname{tang} x) : (\operatorname{tang} x - \sin x) = b(1 + \cos x)$, $2a = b$.
    b) $a \,.\, (\operatorname{tang} x - \sin x) : (\sin x + \operatorname{tang} x) = b(1 - \cos x)$, $2a = b$.
    c) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x + \cos x) : (\operatorname{cotg} x - \cos x) = b(1 + \sin x)$, $2a = b$.
    d) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x - \cos x) : (\operatorname{cotg} x + \cos x) = b(1 - \sin x)$, $2a = b$.

73. a) $a \,.\, (\sin x + \operatorname{tang} x) : (\operatorname{tang} x - \sin x) = b(1 + \cos x) : \cos x$, $a = 3b$.
    b) $a \,.\, (\operatorname{cotg} x - \cos x) : (\operatorname{cotg} x + \cos x) = b(1 - \sin x) : \sin x$, $a = 3b$.

Aehnlich c) und d).

b. **Aufgaben, welche auf gemischte quadratische Gleichungen oder auf leicht lösbare höherer Grade führen.**

74. a) $\tang x \pm \cotg x = a$; b) $\tang x \pm \sec x = a$.

75. $a \sin x = b \cos x^2, a = 3, b = 2$. 76. $a \sin x = b : \tang x, a = b$.

77. a) $\sin x . \tang x = a$; b) $a \sin x = b : \cos x$.

78. $\sin x + \cotg x = a : \sin x, a = 1$.

79. $a \sin x \pm b \operatorname{cosec} x = c, a = b, c = 2a$.

80. $\frac{1}{2} \cos x = \sin x^2 - \cos x^2$.

81. $a \tang x^2 + b = c : \cos x$.

82. $a \sin x^2 + b \sin x \cos x + c \cos x^2 = 0$.

83. $a \tang x + b \cotg x = \sqrt{a^2 + 2ab} . \sin x + \sqrt{b^2 + 2ab} . \cos x$.

84. $(2 \tang x + 3 \cotg x) : (4 \tang x - 6 \cotg x) =$
$(\cos x + 5 \sin x) : (2 \cos x - 10 \sin x)$.

85. $(2 \tang x + 2) : (4 \cotg x + 3) = (8 \cos x + 10 \sin x) :$
$(32 \cos x - 17 \sin x)$.

86. $\cos x^2 - \sin x^2 + \tang x^2 = \frac{5}{6}$.

87. a) $a(1 + \tang y) = b . \cotg y, a = b$, oder $a = 1, b = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})$.
b) $a(1 + \cotg y) = b . \tang y, a = b$, oder $a = \frac{3}{2} . (\sqrt{3} - 1), b = 1$.
c) $a(1 - \tang y) = b . \cotg y, a = 4b$, oder $a = 1, b = 3\sqrt{3} - 5$.
d) $a(1 - \cotg y) = b . \tang y, a = 4b$, oder $a = \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{3}), b = 1$.

88. a) $a(\tang y + \cotg y) = b, 2a = b$ oder $a = 2, b = 5$.
b) $a(\cotg y - \tang y) = b, a = 2, b = 3$, oder $a = 1, b = 2$.

89. a) $a \tang y + b \cotg y = c$; $2a = 2b = c$, oder $a = 2$,
$b = 3, c = 5$, oder $a = 1, b = 2\sqrt{3} - 3, c = 2$.
b) $a \tang y - b \cotg y = c, a = b = c$, oder $2a = 2b = c$,
oder $a = 3, b = 1 - 2\sqrt{3}, c = 6$.

c. **Aufgaben mit mehreren Unbekannten.**

90. $\sin x = a \sin y$, $\tang x = b \tang y$.

91. $\tang x = \sin y$, $\sin x = 2 \cotg y$.

92. $\sin x^2 + \cos y^2 = a$, $\cos x^2 - \sin y^2 = b$.

93. $a \sin x = b \cos y$, $\sin x^2 + \sin y^2 = c$.

94. $9 \tang x + \tang y = 4$, $2 \cotg x + 4 \cotg y = 1$.

95. $\sin x \cos y = a$, $\cos x \sin y = b$.

96. $\cos x \sin y + \tang x \cotg y = 0$, $\cotg x . \cotg y - 1 = 0$.

97. $\sin x = \cos y$, $\sin y = \tang z$, $\sin z = \cotg x$.

98. $\tang x + \tang y = a$
$\tang y + \tang z = b$
$\cotg z - \cotg x = c.$

99. $\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2 = \cos x^2 + \cos y^2 - \cos z^2 =$
$\tang x^2 - \tang y^2 + \tang z^2 = 1.$

100. $\sin x = 2 \sin y$; $\sin y = 2 \sin z$; $\sin z = 2 \sin u$;
$\cos u = \sin x + \sin y + \sin z - 6 \sin u.$

§. 5. Functionen von Summen und Differenzen.

1. Berechne $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$, wenn a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$; b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$ ist.

2. Berechne $\tang(\alpha \pm \beta)$ und $\cotg(\alpha \pm \beta)$ für a) $\tang\alpha = \frac{1}{p}$, $\tang\beta = \frac{1}{q}$, $p = 7$, $q = 3$; b) $\tang\alpha = 0{,}2$, $\tang\beta = 10$.

3. $\sec(\alpha \pm \beta)$, $\cosec(\alpha \pm \beta)$ mittelst analytischer Entwickelung durch die Secanten und Cosecanten von α und β auszudrücken.

4. Entwickele: a) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, b) $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$, c) $\tang(\alpha - \beta + \gamma)$, d) $\cotg\beta(\alpha - - \gamma)$.

5. Entwickele: a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, b) $\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$, c) $\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$, d) $\sin(\alpha-\beta-\gamma-\delta)$.

6. Ebenso: a) $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, b) $\tang(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$, c) $\cotg(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$, d) $\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$.

7. Die Ausdrücke a) $\sin(\alpha+\beta) : \cos(\alpha-\beta)$, b) $\sin(\alpha-\beta) : \cos(\alpha+\beta)$ durch die Tangenten, c) $\cos(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$, d) $\cos(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$ durch die Cotangenten, e) $\sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$, f) $\cos(\alpha-\beta) : \cos(\alpha+\beta)$ durch die Tangenten, sowie durch die Cotangenten der einzelnen Winkel auszudrücken.

8. Wie kann man aus den Formeln für die Functionen von $\alpha \pm \beta$ die früheren Formeln für die Functionen von $90^0 + x$, $90^0 - x$, $180^0 + x$ u. s. w. ableiten?

9. Aus der Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ soll mittelst der früheren Formeln für die Functionen negativer Winkel die für $\sin(\alpha-\beta)$, sowie mittelst des Satzes $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ die für $\cos(\alpha+\beta)$ durch analytische Entwickelung abgeleitet werden.

Kann man in ähnlicher Weise, wenn die allgemeine Gültigkeit einer anderen der Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ angenommen ist, die übrigen aus ihr durch allgemein gültige analytische Entwickelungen ableiten?

10. a) Die Formeln für $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ werden gewöhnlich aus denen für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ auf dem Wege der Rechnung abgeleitet. Man soll eine Ableitung derselben mittelst einer Construction suchen, zunächst unter der Annahme, dass alle vorkommenden Winkel spitz seien.

b) Wie kann man dann die allgemeine Gültigkeit dieser Formeln mittelst der Sätze über die Functionen von $90^0 + \alpha$, u. s. w. nachweisen?

c) Aus der Formel für $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)$ soll diejenige für $\sin(\alpha \pm \beta)$ oder $\cos(\alpha \pm \beta)$ durch blosse Rechnung abgeleitet werden.

11. In einen Kreis mit dem Radius 1 sei ein Viereck $ABCD$ beschrieben, dessen Diagonale CD ein Durchmesser sei und den Winkel ACB in $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$ theile. Man kann dann leicht die zu den vier Seiten des Vierecks gehörigen Centriwinkel durch α und β, und dann diese Seiten selbst als doppelte Sinus bekannter Winkel ausdrücken. Auf welche trigonometrische Formel führt hierbei der ptolemäische Lehrsatz, dass in jedem Sehnenviereck die Summe der Producte je zweier Gegenseiten gleich dem Product der Diagonalen ist?

12. In einem Kreise mit dem Radius 1 sei von dem Centriwinkel $ECA = x$ ein Centriwinkel $BCA = y$ abgeschnitten; es sei ferner $EF \perp AC$, $FJ \perp BC$, $EG \perp BC$ und EG über G verlängert, bis sie die durch F zu BC gezogene Parallele in H trifft. Man beweise mit Hülfe dieser Figur die Formeln für $\sin(x - y)$ und $\cos(x - y)$.

13. a) Welchen Satz erhält man, wenn man den Sinus der Differenz $(a + b) - b$ entwickelt, dann für $\sin(a + b)$ substituirt und $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ anwendet? b) Ebenso, wenn man den Sinus der Summe $(a - b) + b$ entwickelt, für $\sin(a - b)$ substituirt und $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ anwendet?

Die Richtigkeit folgender Formeln zu beweisen:

14. a) $\sin\gamma = \sin\alpha \,.\, \cos(\gamma - \alpha) + \cos\alpha \,.\, \sin(\gamma - \alpha)$; b) $\cos\gamma = \cos\alpha \cos(\gamma - \alpha) - \sin\alpha \,.\, \sin(\gamma - \alpha)$; c) $\sin\gamma = \sin(\beta + \gamma)\cos\beta - \cos(\beta + \gamma)\sin\beta$; d) $\cos\gamma = \cos(\beta + \gamma)\cos\beta + \sin(\beta + \gamma)\sin\beta$.

15. a) $\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta=0$;
b) $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\sin\beta=0$.

16. a) $\sin\alpha\cos(\gamma-\alpha)+\cos\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\sin(\beta+\gamma)\cos\beta - \cos(\beta+\gamma)\sin\beta$.
b) $\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)-\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\cos(\beta+\gamma)\cos\beta + \sin(\beta+\gamma)\sin\beta$.

17. a) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta).(\sin\alpha-\sin\beta)$.
b) $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\sin\beta).(\cos\alpha-\sin\beta) = (\cos\beta+\sin\alpha).(\cos\beta-\sin\alpha)$.

18. a) $\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\alpha+\sin\beta.\cos\beta$.
b) $\sin(\alpha-\beta).\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\alpha-\sin\beta.\cos\beta$.

19. a) $\sin(x+y).\cos(x-y)+\sin(x-y).\cos(x+y) = 2\sin x.\cos x$.
b) $\sin(x+y).\cos(x-y)-\sin(x-y).\cos(x+y) = 2\sin y\cos y$.

20. $\sin(\gamma+\delta)\cos\gamma-\cos(\gamma-\delta)\sin\gamma=\sin\delta-2\sin\gamma^2.\sin\delta$.

21. $\sin(\gamma+\delta)^2=\sin\gamma^2+\sin\delta^2+2\sin\gamma\sin\delta\cos(\gamma+\delta)$.

22. $\sin(\gamma+\delta)=\cos\gamma\cos\delta(\operatorname{tang}\gamma+\operatorname{tang}\delta)$.

23. $\sin(\varphi+\psi)=\frac{1}{2}[\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)](\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\psi)$.

24. $1+\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi(\sin\varphi+\cos\psi)+\cos\varphi(\cos\varphi+\sin\psi)$.

25. $\sin[\eta+\vartheta].[\cos\eta+\cos\vartheta]=[\sin\eta+\sin\vartheta].[1+\cos(\eta+\vartheta)]$.

26. $\sin\vartheta.\cos(k-\lambda)-\sin k\cos(\vartheta-\lambda)=\sin(\vartheta-k)\cos\lambda$.

27. $\sin(a+b)+\cos(a-b)=(\sin a+\cos a)(\sin b+\cos b)$.

In ähnlicher Weise $\sin(a-b)+\cos(a+b)$, sowie $\sin(a+b)-\cos(a-b)$ und $\sin(a-b)-\cos(a+b)$ auszudrücken.

28. $\sin(a+b)^2+\cos(a-b)^2=1+4\sin a\cos a\sin b\cos b$.

29. $\sin(a+b)^2-\cos(a-b)^2=(\sin a^2-\cos a^2)(\cos b^2-\sin b^2)$.

30. $\operatorname{tang}(a+b)+\operatorname{tang}(a-b)=$
$2\operatorname{tang}a.\sec b^2:(1-\operatorname{tang}a^2.\operatorname{tang}b^2)$.

Man bilde eine ähnliche Formel für $\operatorname{tang}(a+b)-\operatorname{tang}(a-b)$.

31. $\operatorname{cotg}(a+b)+\operatorname{cotg}(a-b)=$
$2\operatorname{cotg}a.\operatorname{cosec}b^2:(\operatorname{cotg}b^2-\operatorname{cotg}a^2)$.

Aehnlich für $\operatorname{cotg}(a-b)-\operatorname{cotg}(a+b)$.

32. $\operatorname{tang}(a+b).\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\cos b^2-\cos a^2}{\cos b^2-\sin a^2}=\frac{\sin a^2-\sin b^2}{\cos a^2-\sin b^2}$;

$\operatorname{tang}(a+b).\operatorname{cotg}(a-b)=?$

33. $\operatorname{tang} y = \frac{\sin(z+y)-\sin(z-y)}{\cos(z-y)+\cos(z+y)} = \frac{\cos(z-y)-\cos(z+y)}{\sin(z-y)+\sin(z+y)}$.

34. a) $\operatorname{tang}(p \pm q) = -\frac{\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q}{1 \mp \operatorname{cotg} p \,.\, \operatorname{cotg} q}$;

b) $\operatorname{cotg}(p \pm q) = \frac{1 \mp \operatorname{tang} p \,.\, \operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q}$.

35. $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$.

nlich $\frac{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q}{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}$, $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{cotg} q}{\operatorname{tang} p - \operatorname{cotg} q}$.

36. $\frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q} = \operatorname{tang} p \,.\, \operatorname{tang} q = \frac{\operatorname{tang} q - \operatorname{tang} p}{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}$.

37. a) $\sqrt{3} \cos \vartheta \pm \sin \vartheta = 2 \sin(60^0 \pm \vartheta)$;

b) $\cos \vartheta \pm \sqrt{3} \sin \vartheta = 2 \cos(60^0 \mp \vartheta)$.

38. a) $\frac{\sqrt{3} \pm \operatorname{tang} \vartheta}{1 \mp \sqrt{3} \operatorname{tang} \vartheta} = \operatorname{tang}(60^0 \pm \vartheta)$;

b) $\operatorname{cotg}(60^0 \pm \vartheta) = \frac{\operatorname{cotg} \vartheta \mp \sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{cotg} \vartheta \pm 1}$.

39. $\cos \vartheta \pm \sin \vartheta = \sqrt{2} \sin(45^0 \pm \vartheta) = \sqrt{2} \,.\, \cos(45^0 \mp \vartheta)$

40. a) $\frac{1 \pm \operatorname{tang} \vartheta}{1 \mp \operatorname{tang} \vartheta} = \operatorname{tang}(45^0 \pm \vartheta) = \frac{\cos \vartheta \pm \sin \vartheta}{\cos \vartheta \mp \sin \vartheta}$;

b) $\frac{\operatorname{cotg} \vartheta \mp 1}{\operatorname{cotg} \vartheta \pm 1} = ?$

41. $\sec(a \pm b) = \frac{\sec a \,.\, \sec b}{1 \mp \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b} = \frac{\operatorname{cosec} a \,.\, \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} b \mp 1}$

$= \frac{\sec a \,.\, \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cotg} b \mp \operatorname{tang} a} = \frac{\operatorname{cosec} a \,.\, \sec b}{\operatorname{cotg} a \mp \operatorname{tang} b}$.

Aehnliche Formeln für $\operatorname{cosec}(a \pm b)$!

42. $\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\sin a^2 - \sin b^2}{\sin a \cos a - \sin b \cos b} = \frac{\sin a \cos a + \sin b \cos b}{\cos a^2 - \sin b^2}$.

Aehnlich $\operatorname{tang}(a-b)$.

43. a) $\frac{\sin(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a-b) + \cos(a+b)} = \frac{\cos b + \sin b}{\cos b - \sin b}$;

b) $\frac{\sin(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$.

Aehnlich $\frac{\sin(a+b) - \cos(a-b)}{\sin(a-b) + \cos(a+b)}$ und $\frac{\sin(a+b) - \cos(a-b)}{\sin(a-b) - \cos(a+b)}$.

44. $\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$.

Aehnlich $\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b$, $\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{tang} a \pm \operatorname{cotg} b$.

45. a) $1 \pm \text{tang } a \,.\, \text{tang } b = \frac{\cos(a \mp b)}{\cos a \,.\, \cos b}$;

b) $\text{cotg } a \,.\, \text{cotg } b \pm 1 = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \,.\, \sin b}$.

46. $\text{tang } a^2 - \text{tang } b^2 = \frac{\sin(a+b) \,.\, \sin(a-b)}{\cos a^2 \,.\, \cos b^2}$.

Aehnlich $\text{cotg } b^2 - \text{cotg } a^2$.

47. $1 - \text{tang } a^2 \text{ tang } b^2 = \frac{\cos(a+b) \cos(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2}$.

Aehnlich $\text{cotg } a^2 \text{ cotg } b^2 - 1$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

48. $\sin(x + a) - \cos x \,.\, \sin a = \cos a$.

49. a) $\sin(x + a) = b \sin x + c \cos x$;

b) $\cos(x - a) = m \sin x - n \cos x$.

50. $\text{tang}'(x + a) + \text{tang}(x - a) - 2 \text{ cotg } x = 0$.

51. $\sin(x + \vartheta) + \cos(x - \vartheta) = \cos(x + \vartheta)$.

52. $\sin(\varphi - x) = \cos(\varphi + x)$.

53. $\text{tang}(45^0 + x) - a \text{ tang } x = a - 1$.

54. $\text{cotg}(\beta - x) + \text{tang}(\beta + x) = \frac{\text{cotg } \gamma \,.\, \text{cotg } x - \sin \gamma \,.\, \text{tang } x}{\sin \beta \cos \beta \sec x \text{ cosec } x - 1}$.

55. $\cos(\alpha - \beta) \sin(\gamma - x) = \cos(\alpha + \beta) \sin(\gamma + x)$.

56. $\text{tang } \mu \,.\, \text{tang } x = [\text{tang}(\mu + x)]^2 - [\text{tang}(\mu - x)]^2$.

57. $\sin x \,.\, \sin(\gamma - x) = a$.

58. $\sin(x - y) = \cos(x + y) = 0{,}5$.

59. $\text{tang}(x + y) = p$; $\text{tang}(x - y) = q$.

60. a) $x \sin(\varepsilon - y) = p$; $x \sin(\delta - y) = q$;

b) $x \cos(\varepsilon - y) = p$; $x \cos(\delta - y) = q$.

61. Die Cosinus zweier Winkel verhalten sich wie 3 : 4, und der Cosinus ihrer Differenz ist gleich 0,96; wie gross sind die Winkel?

§. 6. Functionen von 2α.

1. Berechne aus $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ den $\sin 36^0$; ebenso $\cos 36^0$, $\text{tang } 36^0$.

2. Aus $\cos x = 0{,}248$ die Functionen von $2x$ zu berechnen.

3. Berechne a) $\cos x$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = a$, $a = 1$ oder 0,5 oder $\sqrt{(\sqrt{2}-1):(\sqrt{2}+1)}$.

b) $\sin x$ aus $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} x = a$, $a = 1$ oder $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}+1$.

c) $\cos 2x$ und $\operatorname{tang} 2x$ aus $\cos x = 0{,}5$.

4. Entwickele $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tang} 3\alpha$, $\operatorname{cotg} 3\alpha$.

5. Ebenso $\sin 4\alpha$, $\cos 5\alpha$, $\operatorname{tang} 6\alpha$.

6. In einem gleichschenkeligen Dreieck, welches an der Spitze den Winkel 2α habe, und dessen Schenkel gleich 1 sei, drücke man die Grundlinie und die Höhen durch trigonometrische Functionen aus. Welche Formel erhält man, wenn man die hiernach abzuleitenden zwei Ausdrücke für den Flächeninhalt des Dreiecks einander gleichsetzt?

7. Den Cosinus von 2α a) allein durch $\sin\alpha$, b) allein durch $\cos\alpha$ auszudrücken.

Zu beweisen:

8. $\cos 2\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha) \,.\, (\cos\alpha + \sin\alpha)$.

9. a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

10. $2\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

11. $\frac{\sin\beta - \cos\beta}{\sin\beta + \cos\beta} = \pm\sqrt{\frac{1-\sin 2\beta}{1+\sin 2\beta}}$,
positiv wenn β zwischen 45^0 bis 135^0 oder 225^0 bis 315^0 liegt, sonst negativ.

12. $\frac{\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta} = \frac{1-\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{\cos 2\beta}{1+\sin 2\beta}$.

13. $\operatorname{cosec} 2\gamma = \frac{1}{2}\sec\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\gamma$.

14. $\sec 2\gamma = \frac{\sec\gamma^2 \operatorname{cosec}\gamma^2}{\operatorname{cosec}\gamma^2 - \sec\gamma^2} = \frac{\sec\gamma^2}{1-\operatorname{tang}\gamma^2} = \frac{\operatorname{cosec}\gamma^2}{\operatorname{cotg}\gamma^2 - 1}$
$= \frac{\sec\gamma \operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{cotg}\gamma - \operatorname{tang}\gamma}$.

15. $\operatorname{cosec} 3\gamma = \operatorname{cosec}\gamma^3 : (3\operatorname{cosec}\gamma^2 - 4)$.

16. $\sin(2a+b) = 2\sin a\cos a\cos b + \sin b - 2\sin a^2 \sin b$.

17. $(1-\operatorname{tang}\alpha^2) : (1+\operatorname{tang}\alpha^2) = \cos 2\alpha$.

18. a) $\operatorname{tang} 2a = \frac{\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang} a} + \frac{\operatorname{tang} a}{1+\operatorname{tang} a}$;

b) $\operatorname{tang} 2a = \frac{1}{1-\operatorname{tang} a} - \frac{1}{1+\operatorname{tang} a}$.

19. $\sin 2\vartheta : \cos\vartheta^2 = 2\,\mathrm{tang}\,\vartheta$.

20. $2\,\mathrm{cotg}\,2\vartheta = \mathrm{cotg}\,\vartheta - \mathrm{tang}\,\vartheta$.

21. $\mathrm{tang}\,2\vartheta = 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta : (\mathrm{cotg}\,\vartheta^2 - 1)$.

22. $\sin 2\delta + \cos 2\delta = (\sin\delta + \cos\delta)^2 - 2\sin\delta^2$.

23. $\mathrm{cosec}\,\delta^2 - \sec\delta^2 = \frac{\cos 2\delta}{\sin\delta^2\cos\delta^2} = \frac{4\cos 2\delta}{\sin 2\delta^2} = \frac{4\,\mathrm{cotg}\,2\delta}{\sin 2\delta}$.

24. a) $\sin\varepsilon + \mathrm{tang}\,\varepsilon = 2\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$;
b) $\mathrm{tang}\,\varepsilon - \sin\varepsilon = 2\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$.

25. $2\,\mathrm{cotg}\,2\varepsilon : (1 - \mathrm{tang}\,\varepsilon) = \mathrm{cotg}\,\varepsilon\,.\,(1 + \mathrm{tang}\,\varepsilon)$.

26. $\mathrm{tang}\,2\varepsilon : \mathrm{cotg}\,2\varepsilon = (4\sin\varepsilon^2 - 4\sin\varepsilon^4) : (1 - 4\sin\varepsilon^2 + 4\sin\varepsilon^4)$.

27. $\mathrm{tang}\,(45^0 \pm \varphi) = (1 + \mathrm{tang}\,\varphi^2) : (1 - \mathrm{tang}\,\varphi^2) \pm \mathrm{tang}\,2\varphi$.

28. $\mathrm{tang}\,(45^0 \pm \varphi) = (1 \pm \sin 2\varphi) : \cos 2\varphi$.

29. a) $\mathrm{tang}\,(45^0 + \varphi) + \mathrm{tang}\,(45^0 - \varphi) = 2\sec 2\varphi$;
b) $\mathrm{tang}\,(45^0 + \varphi) - \mathrm{tang}\,(45^0 - \varphi) = 2\,\mathrm{tang}\,2\varphi$.

30. $(\mathrm{cosec}\,\varphi + \sec\varphi)^2 : (\mathrm{cosec}\,\varphi^2 + \sec\varphi^2) = 1 + \sin 2\varphi$.

31. $\mathrm{tang}\,\varphi : (\mathrm{tang}\,2\varphi - \mathrm{tang}\,\varphi) = \cos 2\varphi$.

32. $\mathrm{tang}\,2\varphi\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi : (\mathrm{tang}\,2\varphi - \mathrm{tang}\,\varphi) = \sin 2\varphi$.

33. $\cos 2\alpha = 2\sin(45^0 + \alpha)\sin(45^0 - \alpha) =$
$2\cos(45^0 + \alpha)\cos(45^0 - \alpha)$.

34. $\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tang}\,\alpha}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha^2} = \frac{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{1 + \mathrm{cotg}\,\alpha^2} = \frac{2}{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha}$.

35. $\cos 2\alpha = (\mathrm{cotg}\,\alpha^2 - 1) : (\mathrm{cotg}\,\alpha^2 + 1)$
$= (\mathrm{cotg}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha) : (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\alpha)$.

36. $1 + \sin 2\alpha = \frac{(1 + \mathrm{tang}\,\alpha)^2}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha^2} = \frac{(1 + \mathrm{cotg}\,\alpha)^2}{1 + \mathrm{cotg}\,\alpha^2}$
$= \frac{(1 + \mathrm{tang}\,\alpha)(1 + \mathrm{cotg}\,\alpha)}{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha}$.

Aehnlich für $1 - \sin 2\alpha$, $1 + \cos 2\alpha$, $1 - \cos 2\alpha$.

37. $\frac{\sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{2\,\mathrm{tang}\,\beta}{(1 + \mathrm{tang}\,\beta)^2} = \frac{2\,\mathrm{cotg}\,\beta}{(1 + \mathrm{cotg}\,\beta)^2}$
$= \frac{2}{(1 + \mathrm{tang}\,\beta)(1 + \mathrm{cotg}\,\beta)}$.

Aehnlich für $\frac{\sin 2\beta}{1 - \sin 2\beta}$.

38. $\frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \mathrm{tang}\,\beta$. Aehnlich $\frac{\sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$.

39. $\frac{\cos 2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{1 - \mathrm{tang}\,\beta^2}{(1 + \mathrm{tang}\,\beta)^2} = \frac{\mathrm{cotg}\,\beta^2 - 1}{(1 + \mathrm{cotg}\,\beta)^2} = \frac{1 - \mathrm{tang}\,\beta}{1 + \mathrm{tang}\,\beta}$
$= \frac{\mathrm{cotg}\,\beta - 1}{\mathrm{cotg}\,\beta + 1} = \frac{\mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{tang}\,\beta}{(1 + \mathrm{tang}\,\beta)(1 + \mathrm{cotg}\,\beta)}$. Aehnlich $\frac{\cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$.

40. $\frac{\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{1-\operatorname{tang}\beta^2}{2} = \frac{\operatorname{cotg}\beta^2-1}{2\operatorname{cotg}\beta^2} = \frac{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{tang}\beta}{2\operatorname{cotg}\beta}$
$= \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}2\beta}$. Aehnlich $\frac{\cos 2\beta}{1-\cos 2\beta}$.

41. $\frac{1+\sin 2\gamma}{1-\sin 2\gamma} = \left(\frac{1+\operatorname{tang}\gamma}{1-\operatorname{tang}\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\gamma-1}\right)^2$
$= \frac{(1+\operatorname{tang}\gamma)(1+\operatorname{cotg}\gamma)}{(1-\operatorname{tang}\gamma)(\operatorname{cotg}\gamma-1)}$.

Aehnlich $\frac{1+\sin 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}$, $\frac{1+\sin 2\gamma}{1-\cos 2\gamma}$, $\frac{1-\sin 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}$, u. s. w.

42. $\frac{2\sec 2\gamma}{1+\sec 2\gamma} = \sec\gamma^2$.

Aehnlich $\frac{2\sec 2\gamma}{\sec 2\gamma-1}$, $\frac{1+\sec 2\gamma}{\sec 2\gamma-1}$, $\frac{1+\operatorname{cosec} 2\gamma}{\operatorname{cosec} 2\gamma-1}$.

43. $2\sin(45^0-\varphi)\cos(45^0+\varphi) = 1-\sin 2\varphi$;
$2\sin(45^0+\varphi)\cos(45^0-\varphi) = 1+\sin 2\varphi$.

44. a) $\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi = 2\operatorname{cosec} 2\varphi$;
b) $\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tang}\varphi = 2\operatorname{cotg} 2\varphi$.

45. a) $2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$;
b) $2\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b$;
c) $2\sin(a+b)\cos(a-b) = \sin 2a + \sin 2b$;
d) $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$.

46. a) $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha^3}{\cos 3\alpha - \cos\alpha^3} = -\operatorname{cotg}\alpha$;
b) $\frac{\sin 3\alpha - 3\sin\alpha}{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha^3$.

47. $\sin 3\alpha \,.\, \cos\alpha^3 - \cos 3\alpha \,.\, \sin\alpha^3 =$
$\sin 2\alpha^3 + \sin 3\alpha \,.\, \cos 3\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

48. $\sin x \,.\, \cos x = a$.

49. $\sin(a+x) \,.\, \cos(a-x) = b$.

50. $\sin 2x + \sin 3x = 3\sin x$.

51. a) $a\sin 2x = b\sin x$, $a=b$;
b) $a\sin 2x = b\cos x$, $a=b$.

52. a) $a(\cos x+\sin x)^2 = b\sin 2x$, $b=3a$;
b) $a(\cos x-\sin x)^2 = b\sin 2x$, $a=b$.

53. a) $a\operatorname{cotg} 2x = b(1+\operatorname{tang} x)$, $a=b$ oder
$a=\sqrt{3}-1$, $b=1$.

b) $a \cot 2x = b\,(1 - \tan x)$, $a = b$ oder
$a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 1$.

c) $a \cot 2x = b\,(1 + \cot x)$, $a = b$ oder
$a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 1$.

d) $a \cot 2x = b\,(\cot x - 1)$, $a = b$ oder
$a = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $b = 1$.

54. a) $a\,(\cot x - \tan x) = b \cdot \frac{1 + \sin 2x}{\sin 2x}$, $a = b$;

b) $a\,(\cot x - \tan x) = b \cdot \frac{1 - \sin 2x}{\sin 2x}$, $a = b$.

55. a) $a\,(\cot x - \tan x) = b \cos 2x : (1 + \cos 2x)$, $a = b$;
b) $a\,(\cot x - \tan x) = b \cos 2x : (1 - \cos 2x)$, $b = a$.

56. a) $a\,(\cot x - \tan x) = b \cos 2x$, $4a = b$;
b) $a\,(\cot x - \tan x) = b \operatorname{cosec} 2x$, $a = b$;
c) $a\,(\tan x + \cot x) = b \cot 2x$, $a = 1$, $b = 4$.

57. a) $35 \sin x^2 + 8 \cos x^2 - 19 \sin 2x = 0$;
b) $\sin x^2 - 2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$.

58. a) $c \sec x : (\tan x + \cot x) = d\,.\,(\cot x - 2 \cot 2x)$;
b) $c \operatorname{cosec} x : (\tan x + \cot x) = d : (2 \operatorname{cosec} 2x - \cot x)$.

59. a) $m : (\tan x + \cot 2x) = n\,.\,(\cos x - \sin x) : (\cot x - 1)$;
b) $m\,.\,(1 + \cot x) : (\sin x + \cos x) = n\,.\,(\cot x - \cot 2x)$.

60. a) $2a \sec 2x : (1 + \cot x^2) = b\,.\,(\tan 2x - \tan x)$;
b) $2m \tan x : (\tan x + \cot x) = n \sec 2x : (\cot x + \tan 2x)$.

61. a) $2 \cot x^3 = b\,.\,(1 + \cot x^2) : (1 - \tan x\,.\,\cot 2x)$;
b) $2a : (1 + \cot x^2) = b\,.\,\tan 2x\,.\,\tan x : (\tan 2x - \tan x)$;
c) $2m\,.\,\tan x = n\,.\,(\tan x + \cot x) : (\tan x + \cot 2x)$.

62. a) $a\,(1 + \tan x)^2 : (1 + \tan x^2)$
$= b\,.\,\tan x : (1 - \tan x\,.\,\cot 2x)$;

b) $a\,(1 + \cot x)^2 : (1 + \cot x^2) =$
$b\,.\,\cot x : (1 + \cot x\,.\,\cot 2x)$.

c) $m\,(1 + \tan x)\,(1 + \cot x) : (\tan x + \cot x)$
$= n : (\tan x + \cot 2x)$;

d) $2m \sin (45^0 + x)^2 = n\,.\,(\cot x - \cot 2x)$.

63. a) $m\,(\cot x - \tan x) = 2a\,(1 + \cot x - 2 \cot 2x)$;
b) $a\,(1 + \tan x\,.\,\cot 2x) : (\tan 2x + \tan x)$
$= b \cos (45^0 + x)\,.\,\sqrt{2} : \cos x$;

c) $c\,(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} 2x) : (1 + \operatorname{tang} 2x \,.\, \operatorname{cotg} x) =$
$d\,(1 + \operatorname{tang} x) : \operatorname{tang}(45^0 + x)$;

d) $m\,(\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{tang} x) : (1 - \operatorname{tang} 2x \operatorname{tang} x) =$
$n\,(1 - \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{cotg} 2x)$;

e) $a\,(\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} 2x - 1) : (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} 2x) = b\,(1 + \operatorname{cotg} x)$;

f) $a \operatorname{cotg} 2x = d\,(1 + \operatorname{tang} x) : \operatorname{tang} x$;

g) $m\,(1 + \operatorname{tang} x \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} 2x) =$
$n\,(\operatorname{cotg} x - 1) : \operatorname{cotg}(45^0 + x)$.

64. $a\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : 2 \operatorname{tang} x = b \cos(45^0 + x) \,.\, \sqrt{2} : \sin x$.

65. a) $m\,(\sec x^2 \operatorname{cotg} x^2 - \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{tang} x^2) : 2 \operatorname{cosec} 2x$
$= n \operatorname{cotg}(45^0 + x) \operatorname{cotg} 2x$;

b) $a\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : \operatorname{tang} x =$
$b\,(\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{tang} x) : (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tang} 2x)$;

c) $m\,(\operatorname{cotg} x^2 - 1) : \operatorname{cotg} x =$
$n\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{cotg} x + \operatorname{tang} 2x)$;

d) $2a \operatorname{cotg} 2x = b\,(\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} 2x) : (\operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x)$;

e) $m\,(\sec x \operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x \operatorname{tang} x)\,(\cos x - \sin x)$
$= n\,(\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} 2x - 1) : (1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} 2x)$.

f) $2a \operatorname{cotg} 2x = b\,(1 - \operatorname{tang} x^2) : (1 + \operatorname{tang} x^2)$.

g) $m\,(\sec x^2 \operatorname{cotg} x^2 - \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{tang} x^2) =$
$2n \operatorname{cosec} 2x : (1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} 2x)$.

66. Aus den Gleichungen $u = 3v$, $\operatorname{tang} u = x + 1$, $\operatorname{tang} v = x - 1$, x zu berechnen.

67. $\operatorname{tang} 2x + \operatorname{tang} 3x = 3 \,.\, \operatorname{tang} x$.

68. $\sin 3x + \sin x^3 = \sin 2x$.

69. $\cos x^3 - \cos 3x = a \,.\, \cos x$.

70. $\cos 3x - \sin 3x = (\cos x - \sin x)^3$.

71. $\sin 3x - \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3$.

72. $\operatorname{tang} 4x = \operatorname{tang} x$.

73. $2 \cos 4x + 3 \sin 2x^2 + 2 \cos 2x = 1$.

74. $\cos 5x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = \cos(45^0 - 4x)$.

75. Man berechne den spitzen Winkel, dessen Sinus gleich der Hälfte des Cosinus des halben Winkels ist.

§. 7. Functionen von $\frac{1}{2}\alpha$.

1. Aus $\cos\alpha = \frac{119}{169}$ die Functionen von $\frac{1}{2}\alpha$ zu berechnen.

2. Berechne a) $\sin\frac{1}{2}x$ und $\cos\frac{1}{2}x$ aus $\sin x = 0{,}2$; b) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ aus $\operatorname{tang} x = 7$.

3. Aus $\operatorname{tang} 45^0 = 1$ die Functionen von $22^0\,30'$ zu berechnen.

4. Aus $\sin 30^0 = 0{,}5$ die Functionen von 15^0 zu berechnen. Man vergleiche die Resultate mit denjenigen, welche man aus $15^0 = 45^0 - 30^0$ erhält.

5. Man drücke $\operatorname{tang}\alpha$ durch $\operatorname{tang} 2\alpha$ aus, indem man die Formel für $\operatorname{tang} 2\alpha$ auf $\operatorname{tang}\alpha$ auflöst.

6. Welche Gleichungen erhält man, wenn man $\sin\frac{1}{2}\alpha$ aus $\sin\alpha$ oder $\cos\frac{1}{2}\alpha$ aus $\cos\alpha$ oder $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ aus $\operatorname{tang}\alpha$ berechnen will?

Zu beweisen:

7. $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{(\sec 2\alpha - 1):(\sec 2\alpha + 1)}$. Aehnlich $\operatorname{cotg}\alpha$.

8. $\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha)} = \sin(45^0 + \alpha) = \cos(45^0 - \alpha)$. Aehnlich für $1 - \sin 2\alpha$.

9. $\sqrt{(1 + \sin 2\alpha):(1 - \sin 2\alpha)} = \operatorname{tang}(45^0 + \alpha)$;
$\sqrt{(1 + \sin 2\alpha):(1 + \cos 2\alpha)} = \sin(45^0 + \alpha):\cos\alpha$.
Aehnlich für die Quadratwurzeln aus $(1 + \sin 2\alpha):(1 - \cos 2\alpha)$, $(1 - \sin 2\alpha):(1 - \cos 2\alpha)$ u. s. w.

10. a) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$. Aehnlich $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;
b) $\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha) \cdot \operatorname{tang}\alpha$;
c) $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

11. a) $a(1 - \cos x) = b \sin\frac{1}{2}x$, $a = b$;
b) $a(1 + \cos x) = b \cos\frac{1}{2}x$, $a = b$.

12. a) $a(1 - \cos x) = b \operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, $a = b$;
b) $a(1 + \cos x) = b \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x$, $a = b$.

13. a) $a(1 + \cos x) = b \sin x$, $a = b$;
b) $a(1 - \cos 2x) = b \sin 2x$, $b = 3a$.

14. $c \cos x : (1 + \cos 2x) = d \sin x : (1 - \cos 2x)$.

15. a) $a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = b \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$;
b) $a \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = b \cdot \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

16. a) $a \,.\, \sin x = b \,.\, \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$;

b) $a \,.\, \cos x = b \,.\, \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

17. a) $\frac{2c\sin x}{\operatorname{cotg} x} = d \,.\, \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

b) $c \,.\, \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tang} x} = d \,.\, \frac{1+\cos 2x}{2\cos x}$.

18. $a \,.\, (1+\cos 2x) = b \,.\, \cos x : \sqrt{1-\cos x^2}$.

19. a) $a \,.\, \frac{(1-\operatorname{tang} x)^2}{1+\operatorname{tang} x^2} = b \,.\, \frac{1+\cos 2x}{\operatorname{cotg} x}$;

b) $a \,.\, \frac{(\operatorname{cotg} x - 1)^2}{1+\operatorname{cotg} x^2} = b \,.\, \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tang} x}$.

§. 8. Summen und Differenzen von Functionen.

1. In Producte von Functionen zu verwandeln:

a) $\sin 105^0 + \sin 75^0$, b) $\cos 75^0 + \cos 15^0$, c) $\sin 116^0 - \sin 12^0$, d) $\cos 11^0 - \cos 53^0$, e) $\cos 135^0 - \cos 45^0$, f) $\sin 240^0 + \sin 120^0$.

2. Durch Producte von Functionen auszudrücken:

a) $\frac{\sin 50^0 + \sin 10^0}{\sin 74^0 - \sin 34^0}$; b) $\frac{\cos 120^0 + \cos 100^0}{\cos 42^0 - \cos 106^0}$.

3. Welche Formeln erhält man aus denjenigen für

$\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$

durch Division je zweier derselben?

4. Um welche Grösse ist $\sin(\alpha + \beta)$ von $\sin \alpha + \sin \beta$ verschieden? Ebenso $\cos(\alpha + \beta)$ von $\cos \alpha + \cos \beta$, u. s. w.

5. Man soll für die Formeln über die Summen oder Differenzen zweier Sinus oder Cosinus geometrische Beweise suchen. — Anleitung: Man construire im Kreise mit dem Radius 1 die Centriwinkel $ECA = ACG = a$, schneide von ACG den Winkel $ACB = b$ ab, ziehe GE, $BH \perp GE$, $BD \perp AC$, verlängere BC über C bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in K und ziehe KG, KE, BG, BE. Man zeige, dass $\sphericalangle BKE = BGE = \frac{1}{2}(a+b)$, $BKG = BEG = \frac{1}{2}(a-b)$, $EH = \sin a + \sin b$, $GH = \sin a - \sin b$ ist, benutze die rechtwinkeligen Dreiecke KEB und BHE, sowie BGK und BGH u. s. w.

Zu beweisen:

6. $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin b + \sin a} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)$.

7. a) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}.\cos(45^0 - \alpha) = \sqrt{2}.\sin(45^0 + \alpha)$.
Aehnlich $\cos\alpha - \sin\alpha$.

b) $(\cos\alpha + \sin\alpha) : (\cos\alpha - \sin\alpha) = \operatorname{tang}(45^0 + \alpha)$.

c) $2\sin(45 + \alpha) : (\cos\alpha + \sin\alpha) = \sqrt{2}$.
Aehnlich $2\cos(45^0 + \alpha) : (\cos\alpha - \sin\alpha)$.

d) $(\cos\alpha + \sin\alpha) . \cos(45^0 + \alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos 2\alpha$.

e) $2\sin(45^0 + \alpha) : (\cos\alpha - \sin\alpha) = \sqrt{2}.\operatorname{tang}(45^0 + \alpha)$.
U. s. w.

8. a) $\sin\beta + \cos\gamma = 2\cos[45^0 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)]$.
$\cos[45^0 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)] = 2\sin[45^0 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)].\sin[45^0 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)]$;
b) $\cos\gamma - \sin\beta = 2\sin[45^0 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)] . \sin[45^0 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)] =$
$2\cos[45^0 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)].\cos[45^0 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)]$.

9. a) $\operatorname{tang}(a + b) = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2b}$;

b) $\operatorname{cotg}(a + b) = \frac{\cos 2b + \cos 2a}{\sin 2a + \sin 2b}$.

Aehnlich $\operatorname{tang}(a - b)$ und $\operatorname{cotg}(a - b)$.

10. a) $\operatorname{tang}(a + b) : \operatorname{tang}(a - b) =$
$(\sin 2a + \sin 2b) : (\sin 2a - \sin 2b)$.

b) $\operatorname{tang}(a + b) . \operatorname{tang}(a - b) =$
$(\cos 2b - \cos 2a) : (\cos 2b + \cos 2a)$.

11. a) $\frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{\sin(a + b) - \sin(a - b)} = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}$;

b) $\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{\cos(a - b) - \cos(a + b)} = \operatorname{cotg} a . \operatorname{cotg} b$.

12. a) $\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} = \operatorname{tang} a$.

b) $\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} = \operatorname{cotg} b$.

13. $\frac{\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na}{\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na} = \operatorname{tang}\frac{n+1}{2}a$.

Folgende Gleichungen aufzulösen:

14. a) $a(\sin 4x + \sin 2x) = b\cos x,\ a = b$;
b) $a(\sin 4x - \sin 2x) = b\sin x,\ a = b$;
c) $a(\cos 4x + \cos 2x) = b\cos x,\ a = b$;
d) $a(\cos 4x - \cos 2x) = b\sin x,\ a = b$.

15. a) $\sin x \pm \cos x = a,\ a = \sqrt{2}$.
b) $\sin(x + a) + \cos(x - a) = b$.

16. $\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$.

17. $\sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) + \sin(2x-a)$.

18. $\cos x - \cos 3x = \cos 5x$.

19. a) Aus der Summe zweier Winkel und der Summe ihrer Sinus die Winkel selbst zu berechnen. Beispiel: $x+y=90^0$, $\sin x + \sin y = 1{,}40883$.

Anleitung: $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$; $\cos\frac{1}{2}(x-y) = 1{,}40883 : 2\sin 45^0$. Aus $\frac{1}{2}(x-y)$ und $\frac{1}{2}(x+y)$ findet man x und y durch Addition, bezw. Subtraction.

b) $x-y=\delta$; $\sin x + \sin y = s$; $\delta = 20^0$, $s = 1{,}26604$.

c) $x+y=\sigma$; $\sin x - \sin y = d$; $\sigma = 42^0$, $d = 0{,}32423$.

d) $x-y=\delta$; $\sin x - \sin y = d$; $\delta = 70^0$, $d = 0{,}86577$.

e) $x+y=\sigma$; $\cos x + \cos y = s$; $\sigma = 82^0$, $s = 1{,}23644$.

f) $x-y=\delta$; $\cos x + \cos y = s$; $\delta = 20^0$, $s = 1{,}83880$.

g) $x+y=\sigma$; $\cos x - \cos y = d$; $\sigma = 119^0 50'$, $d = 0{,}51319$.

h) $x-y=\delta$; $\cos x - \cos y = d$; $\delta = 23^0$, $d = -0{,}32662$.

20. a) $x+y=\sigma$; $\sin x + \cos y = s$; $\sigma = 110^0$, $s = 1{,}08710$.

Anleitung: $s = \sin x + \sin(90^0 - y)$. Vergl. 19 *a*.

b) $x-y=\delta$; $\sin x + \cos y = s$; $\delta = 44^0$, $s = 1{,}84100$.

c) $x+y=\sigma$; $\sin x - \cos y = d$; $\sigma = 94^0$, $d = 0{,}00418$.

d) $x-y=\delta$; $\cos x - \sin y = d$; $\delta = -6^0 10'$, $d = 0{,}56257$.

21. a) $x+y=\sigma$; $\sin x . \sin y = p$; $\sigma = 120^0$, $p = 0{,}5$.

Anleitung: $2\sin x . \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

b) $x-y=\delta$; $\sin x . \sin y = p$; $\delta = 15^0$, $p = 0{,}35355$.

c) $x+y=\sigma$; $\cos x . \cos y = p$; $\sigma = 134^0$, $p = 0{,}13782$.

d) $x-y=\delta$; $\sin x . \cos y = p$; $\delta = 30^0$, $p = 0{,}5$.

22. a) $x+y=\sigma$; $\sin x : \sin y = m:n$; $\sigma = 150^0$, $m:n = 1:2$.

Anleitung: $(\sin x - \sin y) : (\sin x + \sin y) = (m-n) : (m+n)$.

b) $x-y=\delta$; $\cos x : \cos y = m:n$; $\delta = 20^0$, $m:n = 0{,}93969 : 1$.

c) $x+y=\sigma$; $\cos x : \sin y = m:n$; $\sigma = 113^0$, $m:n = 1841 : 2000$.

23. a) $x+y=\sigma$; $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = s$; $\sigma = 64^0 40'$, $s = 1{,}32374$.

b) $x-y=\delta$; $\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x = d$; $\delta = 6^0$, $d = 1{,}03921$.

c) $x+y=\sigma$; $\operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y = m:n$;
$\sigma = 62^0 40'$, $m:n = 637 : 2000$.

d) $x-y=\delta$; $\operatorname{cotg} x : \operatorname{cotg} y = m:n$; $\delta = 52^0$;
$m:n = 104 : 10139$.

Anhang 1: **Vermischte Aufgaben zu §. 1—8.**

1. Das Product der Tangenten zweier spitzen Winkel ist gleich 1, der eine Winkel gleich a; wie gross ist der andere?

2. Gegeben sei $\operatorname{cotg}(\alpha + 45^0) = m$, gesucht $\operatorname{cotg}(45^0 - \alpha)$.

3. Aus $\operatorname{tang} 54^0 . \operatorname{tang}(45^0 - x) = 1$ den Winkel x zu bestimmen.

4. Folgende Grössen nur durch Winkel unter 45^0 auszudrücken:

$$\frac{\operatorname{cotg} 57^0 . \operatorname{cotg} 25^0}{\operatorname{tang} 49^0 . \operatorname{tang} 44^0}; \quad \frac{\sin 12^0 . \operatorname{cotg} 99^0}{\operatorname{cotg} 84^0 . \cos 105^0} - \frac{\sin 51^0 . \cos 117^0 . \operatorname{tang} 129^0}{\sin 4^0 . \operatorname{cotg} 12^0 . \cos 98^0}.$$

5. Die Ausdrücke $x = \dfrac{\operatorname{tang}(180^0 - \alpha) . \operatorname{tang}(\alpha - 90^0)}{\operatorname{cotg}(\beta - 90^0) . \operatorname{cotg}(180^0 - \beta)}$,

$$y = \frac{\operatorname{cotg} 52^0 . \operatorname{cotg} 38^0}{\operatorname{tang} 44^0 . \operatorname{tang} 45^0}$$ umzuformen.

6. Die Quotienten $\dfrac{\operatorname{cotg}(\alpha - 90^0) . \operatorname{tang}(180^0 - \beta)}{\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) . \operatorname{tang}(\beta - 90^0)}$, $\dfrac{\operatorname{cotg} 47^0 . \operatorname{tang} 56^0}{\operatorname{cotg} 43^0 . \operatorname{tang} 34^0}$ in Producte zu verwandeln und möglichst zu vereinfachen.

7. Aus $\operatorname{tang} a = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tang} b = \frac{1}{3}$ den Winkel $a + 2b$ zu bestimmen.

8. Gegeben $\operatorname{tang} 36^0 = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} : (1 + \sqrt{5})$, gesucht $\operatorname{tang} 54^0$.

9. Gegeben $2a + b + 2c = 180^0$, $\operatorname{cotg}(a + c) = p$, gesucht $\operatorname{tang} b$.

10. Gegeben $\operatorname{tang} a = 4{,}2356$, gesucht $\operatorname{tang}(a + 45^0)$.

11. Aus $\cos(x - y) = \cos(x + y) = \frac{1}{2}$ die Winkel x und y zu berechnen.

12. Aus $\sin(a + b) . \operatorname{tang} c = \cos(a + b)$ zu berechnen $x = a + b + c$.

13. Beweise, dass $\sin 45^0$ das harmonische Mittel zwischen $\operatorname{tang} 22\frac{1}{2}^0$ und $\operatorname{cotg} 22\frac{1}{2}^0$ ist.

14. Wenn $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta^3$ und $\operatorname{tang} \beta = 2 \operatorname{tang} \varphi$ ist, so kann $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ gesetzt werden.

15. Unter welchen Bedingungen ist $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$ eine richtige Gleichung?

16. Aus $\cos(\varphi - \vartheta + \alpha) \cdot \cos(\vartheta - \alpha) = m$ und $\cos(\varphi - \vartheta - \alpha) \cdot \cos(\vartheta + \alpha) = n$, ϑ zu eliminiren.

17. Aus $A = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha^3 \cdot (1 + \operatorname{cosec}\alpha)^2$; $B = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha^3 (1 + \operatorname{cosec}\alpha)^2$, α zu eliminiren.

18. Aus $m = \operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha$, $n = \sec\alpha - \cos\alpha$, α zu eliminiren.

Zu beweisen:

19. $\dfrac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = \dfrac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y$.

Aehnlich $\dfrac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y}$.

20. $[\sec(90^0 + \vartheta)^2 + \operatorname{cosec}(90^0 + \vartheta)^2] : [\sec(90^0 + \vartheta)^2 - \operatorname{cosec}(90^0 + \vartheta)^2] = \sec 2\vartheta$.

21. $2\operatorname{cotg}(90^0 + \vartheta) \cdot \operatorname{cotg}(90^0 - \vartheta) \cdot \sin(90^0 + \vartheta) = (\sin 2\vartheta - 2\tan\vartheta) : \cos(90^0 - \vartheta)$.

22. $\operatorname{cosec}(90^0 + \frac{1}{2}\vartheta) \cdot \operatorname{cosec}(90^0 - \frac{1}{2}\vartheta) : (\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta$.

23. $(\cos 90^0 - \cos 2\vartheta) - (\cos 90^0 + \cos 2\vartheta) = 2(\sin\vartheta^4 - \cos\vartheta^4)$.

24. $4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = -\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma)$.

25. $4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

26. $2\operatorname{cotg} 2\varphi : (1 - \operatorname{tang}\varphi) = \operatorname{cotg}\varphi \cdot (1 + \operatorname{tang}\varphi)$.

27. $2\cos\dfrac{45^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$.

28. $2\cos\dfrac{30^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{3}}}$.

29. $\sin a + \sin b + \cos a + \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{1+\sin(a+b)}$.

30. $\sin a + \sin b - \cos a - \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{1-\sin(a+b)}$.

31. $\sin a - \sin b + \cos a + \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1+\sin(a-b)}$.

32. $\sin a - \sin b - \cos a - \cos b = \pm 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1-\sin(a-b)}$.

33. $\sin a + \sin b + \cos a - \cos b = \mp 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{1-\sin(a-b)}$.

34. $\sin\frac{1}{2}(a+c) \cdot \cos\frac{1}{2}(a-c) + \sin\frac{1}{2}(b-c) \cdot \cos\frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)$.

35. a) $\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}+\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}+\ldots+\frac{\sin(\alpha_n-\alpha_1)}{\cos\alpha_n\cos\alpha_1}=0.$

b) $\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}+\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\ldots+\frac{\sin(\alpha_n-\alpha_1)}{\sin\alpha_n\sin\alpha_1}=0.$

Ist $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, so gelten die Formeln (36—51):

36. $\mathrm{tang}\,\alpha+\mathrm{tang}\,\beta+\mathrm{tang}\,\gamma=\mathrm{tang}\,\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\beta\,.\,\mathrm{tang}\,\gamma.$

37. $\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha+\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\beta+\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma=\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\beta\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma.$

38. $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\beta+\mathrm{tang}\frac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma+\mathrm{tang}\frac{1}{2}\beta\,.\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma=1.$

39. $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Aehnlich: $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\cos\gamma^2$; $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\cos\gamma^2$; $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\cos\gamma^2.$

40. $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2=2\,(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

Aehnlich: $\sin\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2.$

41. $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

Aehnlich: $\sin\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2.$

42. $1-\sin\frac{1}{2}\alpha^2-\sin\frac{1}{2}\beta^2-\sin\frac{1}{2}\gamma^2=2\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma.$

43. $\mathrm{cotg}\,\alpha+\mathrm{cotg}\,\beta+\mathrm{cotg}\,\gamma=\mathrm{cotg}\,\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\,\beta\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma+\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\mathrm{cosec}\,\beta\,.\,\mathrm{cosec}\,\gamma.$

44. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma.$

45. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma.$

46. $\sin\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma).$

Aehnlich $\sin\alpha-\cos\beta-\cos\gamma.$

47. $\mathrm{cotg}\,\alpha\,.\,\mathrm{cotg}\,\beta+\mathrm{cotg}\,\beta\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma+\mathrm{cotg}\,\gamma\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha=1.$

48. $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

Aehnlich: $\sin2\alpha+\sin2\beta-\sin2\gamma.$

49. $(\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha+\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma):(\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\beta+\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma)=\sin\beta:\sin\alpha.$

50. $(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma):(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=8\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma.$

51. $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Aehnlich: $\cos2\alpha+\cos2\beta-\cos2\gamma.$

Man beweise ferner:

52. $\mathrm{tang}(a-b)+\mathrm{tang}(b-c)+\mathrm{tang}(c-a)=$ $[\mathrm{tang}\,a^2\,.\,\mathrm{tang}\,c-\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,c^2+\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,b^2-\mathrm{tang}\,a^2\,.\,\mathrm{tang}\,b+\mathrm{tang}\,b\,.\,\mathrm{tang}\,c^2-\mathrm{tang}\,b^2\,.\,\mathrm{tang}\,c]:[1+\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,b+\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,c+\mathrm{tang}\,b\,.\,\mathrm{tang}\,c+\mathrm{tang}\,a^2\,.\,\mathrm{tang}\,b\,.\,\mathrm{tang}\,c+\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,b^2\,.\,\mathrm{tang}\,c+\mathrm{tang}\,a\,.\,\mathrm{tang}\,b\,.\,\mathrm{tang}\,c^2+\mathrm{tang}\,a^2\,.\,\mathrm{tang}\,b^2\,.\,\mathrm{tang}\,c^2].$

53. $\sin(a-b)^2+\sin(a-c)^2+\sin(b-c)^2=$
$2\left\{1-\cos(a-b).\cos(a-c).\cos(b-c)\right\}.$

54. $\cos(a-b)^2+\cos(a-c)^2+\cos(b-c)^2=$
$1+2\cos(a-b).\cos(a-c).\cos(b-c).$

55. $\cos\frac{1}{2}(a+b+c)^2+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)^2+\cos\frac{1}{2}(a-b+c)^2$
$+\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)^2=2(1+\cos a.\cos b.\cos c).$

56. $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)^2+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)^2+\sin\frac{1}{2}(a-b+c)^2$
$+\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)^2=2(1-\cos a.\cos b.\cos c).$

57. $\cos a^2+\cos b^2+\cos c^2+\cos(a+b+c)^2=$
$2\left\{1+\cos(a+b)\cos(a+c)\cos(b+c)\right\}.$

58. $\mathrm{tang}(a+b+c)+\mathrm{tang}(a+b-c)+\mathrm{tang}(a-b+c)$
$+\mathrm{tang}(-a+b+c)=2.[2.\sin2(a+b+c)+\sin4a+\sin4b+\sin4c]$
$:[4\cos2a.\cos2b.\cos2c+\cos4a+\cos4b+\cos4c+1].$

59. $4\cos(a+b+c).\cos(a+b-c).\cos(a-b+c)\cos(-a+b+c)$
$=2\cos2a.\cos2b.\cos2c+\cos2a^2+\cos2b^2+\cos2c^2-1.$

60. $4\sin(a+b+c).\sin(a+b-c).\sin(a-b+c).\sin(-a+b+c)$
$=2\cos2a.\cos2b.\cos2c-\cos2a^2-\cos2b^2-\cos2c^2+1.$

61. $8\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d).\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d).\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)$
$.\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)=4\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}d$
$+4\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}d-\cos a-\cos b-\cos c-\cos d.$

62. $8\cos\frac{1}{4}(a+b+c-d).\cos\frac{1}{4}(a+b-c+d).\cos\frac{1}{4}(a-b+c+d)$
$.\cos\frac{1}{4}(-a+b+c+d)=4\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}d$
$+4\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}d+\cos a+\cos b+\cos c+\cos d.$

63. $\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c)=$
$4\cos\frac{1}{2}(a-b).\sin\frac{1}{2}(a-c).\cos\frac{1}{2}(b-c).$

64. $\cos(a-b)+\cos(a-c)+\cos(b-c)=$
$4\cos\frac{1}{2}(a-b).\cos\frac{1}{2}(a-c).\cos\frac{1}{2}(b-c)-1.$

65. $\mathrm{tang}\,5^0.\mathrm{tang}\,40^0-\mathrm{tang}\,10^0.\mathrm{tang}\,35^0=$
$\mathrm{tang}\,10^0+\mathrm{tang}\,35^0-\mathrm{tang}\,5^0-\mathrm{tang}\,40^0.$

Folgende Gleichungen aufzulösen:

66. a) $\cos x=\mathrm{tang}\,x$; b) $\sec x=\mathrm{cotg}\,x$.

67. a) $a\sin x=b.\mathrm{tang}\,x, a=2b$; b) $a\cos x=b\,\mathrm{cotg}\,x, a=2b$.

68. $\cos x=\sin x^2-\cos x^2$.

69. $(\mathrm{cotg}\,x-1:\cos x):\mathrm{cotg}\,x=\frac{1}{16}$.

70. $\mathrm{cotg}(180^0-3x)=\mathrm{tang}(x-180^0)$.

71. $(\tan g\, x + \tan g\, \beta) : (\cot g\, x + \cot g\, \beta) = \tan g\, \beta + \tan g\, x.$

72. a) $a(\cos x + \sin x) = b,\ a = b$; b) $a(\cos x - \sin x) = b,\ a = b.$

73. a) $a(\cos x + \sin x) = b \cos 2x,\ a = b;$

b) $a(\cos x - \sin x) = b \cos 2x,\ a = b;$

c) $a(\cos x + \sin x) = \frac{b \cos 2x}{1 - \sin 2x},\ a = b;$

d) $a(\cos x - \sin x) = \frac{b \cos 2x}{1 + \sin 2x}.$

74. a) $a(\cos x + \sin x) = b(1 + \sin 2x),\ a = b;$

b) $a(\cos x - \sin x) = b(1 - \sin 2x).\ a = b.$

75. a) $a(\cos x + \sin x)^2 = b \cdot \cos 2x;$

b) $a(\cos x - \sin x)^2 = b \cdot \cos 2x.$

76. a) $a(\tan g\, x - \cot g\, x) = \frac{b \cot g\, 2x}{1 + \sin 2x};$

b) $a(\cot g\, x - \tan g\, x) = \frac{b \cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

77. a) $a(\tan g\, x + \cot g\, x) = b \sec 2x,\ a = b$ oder $2a = b.$

b) $a(\tan g\, x + \cot g\, x) = b \cos 2x,\ 4a = b$ oder $8a = b.$

78. $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{cosec} x^2.$

79. $\cot g\, x \cdot \tan g\, 2x - \tan g\, x \cdot \cot g\, 2x = 2.$

80. $\tan g\, 3x = \sin 6x.$

81. $\tan g\, x \cdot (1 + \cos 2\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \tan g\, 2x.$

82. $\sin x = \sin a \cdot \sin(x + b)$; $\tan g\, x$ zu suchen.

83. $\sin x - \cos x = 4 \cos x^2 \cdot \sin x + 4 \sin x^3.$

84. $\tan g\, x + \sec x^2 = 3.$

85. $\tan g\, \frac{1}{2}x = \operatorname{cosec} x - \sin x.$

86. $x^0 \cdot \sin x = - x^0 \cdot \cos x.$

87. $\sin x = m . \sin y$
$\tan g\, x = n . \tan g\, y.$

88. $\sin x + \sin y = a$
$\cos x + \cos y = b.$

89. $\sin x = a . \sin y$
$2 \tan g\, x = \tan g \frac{1}{2} y.$

90. $(\sec x - \sec y) : (\sec x + \sec y) =$
$(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} y) : (\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} y)$; $\sin x = \tan g\, y.$

91. $\tan g \frac{1}{2}x \cdot \tan g \frac{1}{2}y + \tan g \frac{1}{2}x \cdot \tan g \frac{1}{2}z - \tan g \frac{1}{2}y \cdot \tan g \frac{1}{2}z$
$= \tan g\, x^2$; $\tan g(x + y) + \tan g\, z = 0$;
$\sin x^2 + \sin y^2 = \cos y^2$; $x, y, z < 180^0.$

92. $2\sqrt{x^2 - x^4} = \sin \alpha.$

93. $\operatorname{arc} \tan g\, (= x + 1) = 3 \cdot \operatorname{arc} \tan g\, (= x - 1).$

$\ldots$ 4. $\operatorname{arc\,tang}\left(=\frac{1}{x-1}\right)-\operatorname{arc\,tang}\left(=\frac{1}{x+1}\right)=\frac{90^0}{6}$.

95. $\operatorname{arc\,sec}(=a)-\operatorname{arc\,sec}(=b)=\operatorname{arc\,sec}\left(=\frac{x}{b}\right)-\operatorname{arc\,sec}\left(=\frac{x}{a}\right)$.

96. Wenn $\operatorname{tang}\alpha=(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi)^2$ und $\cos\varphi^2=2m^2-1$ ist, so ist $m=\pm 1:(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

97. Ist $\operatorname{tang} x=\cos a\,.\,\operatorname{tang} y$, so ist $\operatorname{tang}(y-x)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}a^2\,.\,\sin 2y:(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a^2\,.\,\cos 2y)$.

98. $(\cos a+\sqrt{-1}\sin a)^2=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$.

99. $(\operatorname{cotg} a+\sqrt{-1}\operatorname{tang} a)^2=4\cos x\,.\,\sec x^2+2\sqrt{-1}$.

§. 9. Berechnung trigonometrischer Functionen.

1. Aus den bekannten Werthen der Functionen von 45^0 und 30^0 die Werthe der Functionen von 15^0 in geschlossener Form abzuleiten.

2. Man berechne $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$ aus dem bekannten Werthe von $\cos 30^0$ und vergleiche die Resultate mit den in der vorigen Aufgabe gefundenen.

3. Man soll den Zahlenwerth von $\sin 18^0$ (aus der Seite des einbeschriebenen regelmässigen Zehnecks) auf 4 Decimalen berechnen. Ebenso $\sin 36^0$, $\cos 18^0$.

4. Mittelst der bekannten Ausdrücke für die Functionen von 18^0 und von 15^0 den Werth des $\sin 3^0$ in geschlossener Form darzustellen.

5. Mittelst des in der vorigen Aufgabe gefundenen Werthes von $\sin 3^0$ den Werth von $\sin 6^0$ zu berechnen.

6. Wenn $\sin 3\alpha=a$ bekannt ist, so ist $\sin\alpha^3-\frac{3}{4}\sin\alpha+\frac{1}{4}a=0$. Welchen Ausdruck erhält man hieraus mittelst der Cardanischen Formel für $\sin\alpha$, und warum lässt sich aus demselben der genaue Werth des $\sin\alpha$ nicht ermitteln? — Welche ähnliche Gleichungen erhält man für die Berechnung von $\cos\alpha$ aus $\cos 3\alpha$ und von $\operatorname{tang}\alpha$ aus $\operatorname{tang} 3\alpha$?

7. Durch fortgesetztes Halbiren erhält man aus 3^0 die Winkel $\alpha_1=1^0 30'$, $\alpha_2=0^0 45'$, $\alpha_3=0^0 22' 30''$, $\alpha_4=0^0 11' 15''$. Es sei mittelst der Formeln für $\frac{1}{2}\alpha$ hiernach $\sin\alpha_4=0{,}0032725$ gefunden; man berechne $\operatorname{tang}\alpha_4$, zeige, dass beide Functionen auf 7 Stellen übereinstimmen, dass somit näherungsweise $\sin\alpha_4$

$= \alpha_4 = \text{tang}\,\alpha_4$ gesetzt werden kann, und berechne mittelst der Formel $\sin\alpha_4 : \sin 0^0 10' = 11\frac{1}{4} : 10$ den $\sin 0^0 10'$.

8. Mit Hülfe des Satzes, der Unterschied zwischen einem Bogen und seinem Sinus ist kleiner als die dritte Potenz des Bogens berechne man auf 7 Decimalen a) $\sin 1'$, b) $\sin 1''$.

9. Unter der Voraussetzung, dass der binomische Lehrsatz auch für gebrochene Exponenten bewiesen worden, soll der durch die Cardanische Formel gelieferte Ausdruck für $\sin\alpha$ aus der Gleichung der Aufgabe 6 dieses §. in die Reihe

$$x = -\sin 3\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \left\{1 - \binom{\frac{1}{3}}{2} \text{cotg}\, 3\alpha^2 + \binom{\frac{1}{3}}{4} \text{cotg}\, 3\alpha^4 - \binom{\frac{1}{3}}{6} \text{cotg}\, 3\alpha^6 + \dots\right\}$$

entwickelt werden, in welcher die imaginären Bestandtheile weggefallen sind. — Welche Bedingung muss erfüllt sein, wenn dieser Ausdruck zur Berechnung von x anwendbar sein soll? Ist in diesem Fall der für x gefundene Zahlenwerth nothwendig gleich $\sin\alpha$, oder kann er andere Grössen repräsentiren und welche?

Man setze $3\alpha = 60^0$, berechne den Zahlenwerth von x auf 5 Decimalstellen und zeige, dass derselbe gleich $-\sin(60^0 + 20^0)$ ist. Wie findet man hieraus $\sin 10^0$, und wie kann man dann mit Hinzuziehung der bekannten Werthe der Functionen von 9^0 eine von Grad zu Grad fortschreitende Sinustafel berechnen?

10. Die irreducibele cubische Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 3\alpha = 0$, $x = \sin\alpha$, kann durch Verwandlung von x in einen Kettenbruch näherungsweise aufgelöst werden. Man soll auf diesem Wege $\sin 10^0$ auf 5 Decimalstellen berechnen.

Anleitung: Da man *a priori* weiss, dass $x < 1$ ist, so setze man in $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ sogleich $x = \frac{1}{\alpha}$; man erhält $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 8 = 0$. Die Annahme verschiedener ganzen Werthe für α zeigt, dass zwischen $\alpha = -1$ und -2, zwischen $\alpha = +1$ und $+2$ und zwischen $\alpha = +5$ und $+6$ das Polynom $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 8$ aus dem Negativen in das Positive oder umgekehrt übergeht, dass also zwischen diesen Zahlen je ein Werth von α liegt, für welchen das Polynom gleich Null ist. Man kann also $\alpha = -1 + \frac{1}{\beta}$, oder $1 + \frac{1}{\beta}$ oder $5 + \frac{1}{\beta}$ setzen. Da nun $\sin 10^0 < \sin 30^0$, also $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$ ist, so muss $\alpha > 2$ sein, daher ist $\alpha = 5 + \frac{1}{\beta}$ zu wählen. Dies führt zu der Gleichung $17\beta^3 - 15\beta^2 - 9\beta - 1 = 0$,

welcher $\beta = 1 + \frac{1}{\gamma}$, $8\gamma^3 - 12\gamma^2 - 36\gamma - 17 = 0$, $\gamma = 3 + \frac{1}{\delta}$, $\delta = 6 + \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon = 1 + \frac{1}{\zeta}$, $\zeta = 7 + \frac{1}{\eta}$, u. s. w. folgt. Der bis zum Gliede ζ genommene Näherungsbruch $\frac{228}{1313}$ liefert bereits eine Genauigkeit von 6 Decimalstellen.

11. Wie kann die Formel

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \tfrac{1}{2} (a + b) \sin \tfrac{1}{2} (a - b)$$

oder eine ähnliche zur fortschreitenden Berechnung einer trigonometrischen Tafel verwerthet werden?

12. Wie kann die (zu beweisende) Gleichung $\sin (30^0 + \beta) = \cos \beta - \sin (30^0 - \beta)$ zur Bestimmung der Sinus der Winkel zwischen 30^0 und 45^0 verwerthet werden?

13. Man beweise die Richtigkeit der Gleichung $\sin a + \sin (36^0 - a) + \sin (72^0 + a) = \sin (36^0 + a) + \sin (72^0 - a)$ und erläutere ihre Anwendbarkeit zur Controle bei der Berechnung einer trigonometrischen Tafel.

14. Setzt man der Kürze halber $\sin \alpha = s$, $\cos \alpha = c$, so ist bekanntlich

$\cos 2\alpha = c^2 - s^2$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2cs$

$\cos 3\alpha = c^3 - 3cs^2$ $\qquad$ $\sin 3\alpha = 3c^2 s - s^3$

$\cos 4\alpha = c^4 - 6c^2 s^2 + s^4$ $\qquad$ $\sin 4\alpha = 4c^3 s - 4cs^3$, u. s. w.

Man bilde durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den aus dem binomischen Lehrsatz hervorgehenden Reihen für $(c - s)^n$ Formeln für $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ und beweise die allgemeine Gültigkeit derselben durch den Schluss von n auf $n + 1$. Aus diesen Formeln sollen alsdann Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ nach folgender Anleitung abgeleitet werden:

Man setze einen Bogen x im Kreise, dessen Radius $r = 1$ ist, gleich $n\alpha$, nehme n als unendlich wachsend, und demgemäss α als unendlich abnehmend an, so ist $n = n - 1 = n - 2$, u. s. w., und als Grenze für $s = \sin \alpha$ bekanntlich $\alpha = \frac{x}{n}$, als Grenze für $c = \cos \alpha$ dagegen 1 zu setzen. Die Substitution dieser Gleichungen in jene Formeln liefert die gesuchten Reihen.

15. Aus den für $\sin x$ und $\cos x$ gefundenen Reihen leite man entsprechend gebildete Reihen für $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{cotg} x$ ab.

16. Man berechne mit Hülfe der betreffenden Reihen **a)** $\sin 3^0$, **b)** $\cos 24^0$, **c)** $\operatorname{tang} 12^0$ auf je drei Decimalstellen.

17. Es ist $(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^2 = \cos \alpha^2 + 2\sqrt{-1} \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$. Ist entsprechend auch $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$? Man beweise die Gültigkeit des Moivre-

schen Lehrsatzes: $(\cos\alpha \pm i\,.\,\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$ durch den Schluss von n auf $n+1$ (für ganze, positive Exponenten). — Welche Ausdrücke erhält man für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ aus $\cos 3\alpha + i\,.\,\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\,.\,\sin\alpha)^3$ und $\cos 3\alpha - i \sin 3\alpha = (\cos\alpha - i\,.\,\sin\alpha)^3$? Aus den Formeln $\cos x + i\,.\,\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i \sin\frac{x}{n}\right)^n$ und $\cos x - i\,.\,\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} - i\sin\frac{x}{n}\right)^n$ leite man durch Addition und Subtraction, sowie durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes Formeln für $\cos x$ und $\sin x$ ab und setze in denselben n unendlich wachsend, demgemäss also $\cos\frac{x}{n} = 1$, $\sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}$, $n = n-1 = n-2 =$ etc., ähnlich wie in Aufgabe 14.

18. Man soll den Bogen x durch eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von $\sin x$ geordnete Reihe darstellen. Ebenso durch $\operatorname{tang} x$.

Anleitung: Man setze die Reihe mit unbestimmten Coefficienten an, substituire in dieselbe die für die betreffende Function geltende, nach Potenzen von x geordnete Reihe und wende den Satz von den unbestimmten Coefficienten an.

19. Mit Hülfe der in der vorigen Aufgabe gesuchten Reihe

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \ldots$$

den Winkel zu berechnen, dessen Tangente gleich $\frac{1}{5}$ ist.

20. Welche Resultate erhält man aus der in der vorigen Aufgabe angeführten Reihe, wenn man a) $x = \operatorname{arc} 45^0$, b) $x = \operatorname{arc} 30^0$, c) $x = \operatorname{arc} 18^0$, also a) $x = \frac{\pi}{4}$, u. s. w. setzt?

Man berechne mit Hülfe einer dieser Reihen die Zahl π auf 3 Decimalstellen.

§. 10. Gebrauch der Tafeln.

A. Beispiele für den Gebrauch siebenstelliger Tafeln.

I. Aufschlagen der Logarithmen der Functionen gegebener Winkel

a) ohne Interpolation:

1) $\log\sin\ 34^0\,12' = 9{,}7498007.$
2) $\log\operatorname{tang}\ 12^0\,22' = 9{,}3409484.$
3) $\log\cos\ 64^0\,13' = 9{,}6384585.$
4) $\log\sin\ 46^0\,42' = 9{,}8619958.$

5) log cotg 22° 11′ = 10,3896027.
6) log cos 14° 52′ = 9,9852133.
7) log sin 4° 48′ = 8,9226105.
8) log cos 55° 0′ = 9,7585913.

b) mit Interpolation:

Regel 1: Man schlage die verlangte Function des nächst-kleineren Winkels der Tafel auf, multiplicire das zwischen ihr und dem nächst-grösseren Winkel stehende Proportionaltheilchen der Tafel ($= d : 60$) mit der Anzahl der Secunden und addire die ganzen Einheiten des Products zu der letzten Decimale der vorhergehenden Function bei Sinus und Tangente, subtrahire sie dagegen bei Cosinus und Cotangente.

9) log sin 32° 13′ 17″ = 9,7268837.
10) log cos 42. 15. 10 = 9,8693406.
11) log tang 57. 12. 9,5 = 10,1908506.
12) log cos 76. 13. 12,75 = 9,3769252.
13) log sin 80. 33. 11,34 = 9,9940699.
14) log sin 10. 36. 25 = 9,2649841.
15) log cos 10. 36. 25 = 9,9925151.
16) log cotg 36. 24. 11,1 = 10,1323283.
17) log tang 38. 32. 10,05 = 9,9011671.
18) log cotg 79. 59. 0,17 = 9,2470548.

Regel 2: Da die Differenzen, resp. Proportionaltheilchen aus grösseren Tafeln entnommen sind, so wird man, wenn die Anzahl der Secunden über 30 ist, mit einem Gewinn nicht nur an Zeit, sondern auch an Genauigkeit, statt von der Function des nächst-kleineren, von der des nächst-grösseren Winkels ausgehen. Daher die allgemeine Regel: Man gehe von der Function des nächsten Winkels der Tafel aus und addire oder subtrahire das berechnete Product der betreffenden Secundenzahl und des Proportionaltheilchens, je nachdem diejenige Function der Tafel, welcher man sich zu nähern hat, grösser oder kleiner als diejenige ist, von welcher man ausgeht.

19) log cotg 74° 46′ 59″ = 9,4345874.
20) log sin 12. 9. 50 = 9,3236825.
21) log cos 23. 15. 49,35 = 9,9631721.
22) log tang 43. 59. 59,5 = 9,9848351.
23) log sin 65. 18. 50,1 = 9,9583773.
24) log tang 71. 30. 30 = 10,4756901.
25) log cotg 26. 23. 41 = 10,3042650.
26) log cos 55. 23. 48 = 9,7542654.

Regel 3: Bei Winkeln, welche kleiner sind als 6°, kann man bei siebenstelligen Logarithmen nicht mehr darauf rechnen, dass die Veränderungen der Logarithmen der Sinus, Tangenten und Cotangenten von Minute zu Minute noch proportional den Veränderungen des Bogens sind. Deshalb bedarf man für solche kleine Winkel zunächst

etwa einer von 10 zu 10 Secunden fortschreitenden Tafel, innerhalb welches Intervalls die Proportionalität angenommen wird. Aehnliches gilt für die Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel über 84°.

27) log sin 4° 3′ 21″ = 8,8495947.
28) log tang 3. 44. 52 = 8,8162712.
29) log cotg 3. 27. 19 = 11,2191127.
30) log cos 84. 35. 18,9 = 8,9745425.
31) log cotg 85. 33. 24,2 = 8,8904526.
32) log tang 86. 54. 34,6 = 11,2676881.

Regel 4: Wenn die Bogen (Winkel) so klein werden, dass auch das Interpoliren von 10 zu 10 Secunden nicht mehr statthaft ist, so muss man entweder Tafeln benutzen, welche von Secunde zu Secunde fortschreiten (Vega S. 206—228), oder man muss sich (von 0° 0′—1° 20′) der Secundensumme bedienen. Die Anwendung dieser letzteren beruht auf dem Princip, dass bei sehr kleinen Bogen, wo die Differenzen derselben sich nicht mehr verhalten, wie die Differenzen der Logarithmen, doch angenommen werden darf, dass die Sinus und Tangenten sich verhalten, wie die Bogen selbst. Man verwandelt demnach den aufzuschlagenden Winkel und den nächsten Winkel der Tafeln in Secunden, sucht von beiden Zahlen die Logarithmen, subtrahirt dieselben von einander und gebraucht ihre Differenz als die logarithmische Differenz der Sinus oder Tangenten, und ebenso für die Cotangenten, deren log. Differenzen bekanntlich den entsprechenden der Tangenten gleich sind. Für die Cotangenten und Cosinus von Winkeln, welche entsprechend nahe an 90° liegen, wird man die logarithmische Differenz ebenso durch die Secundensummen der Complemente finden, folglich auch für die Tangenten.

33) log sin 1° 18′ 12″ = 8,3568954.
34) log tang 0. 45. 32,5 = 8,1221605.
35) log cos 89. 2. 14 = 8,2253830.
36) log sin 0. 58. 13,15 = 8,2287715.
37) log cotg 88. 49. 17. = 8,3133092.
38) log tang 1. 0. 4,6 = 8,2424761.
39) log sin 1. 14. 33,4 = 8,3361786.
40) log cos 88. 53. 59,9 = 8,2832544.
41) log tang 0. 10. 44,4 = 7,4947317.
42) log cotg 89. 30. 1,2 = 7,9405688.
43) log sin 1. 10. 4,91 = 8,3093015.
44) log tang 1. 0. 0,85 = 8,2420241.

Regel 5: Bei Bogen, welche kleiner als 1′ 20″ sind, stimmen die Logarithmen der Sinus und der Tangenten, und folglich auch die der Bogen, in allen 7 Stellen überein. Man findet daher den log sin und log tang eines solchen Bogens, indem man von dem Logarithmus seiner Secundensumme $\log \frac{180^0}{\pi} = \log \varrho = 5{,}3144251$ subtrahirt.

45) log sin 0° 1′ 12″ = 6,5429074.
46) log tang 0. 0. 4,6 = 5,3483327.
47) log cos 89. 59. 14 = 6,3483327.
48) log tang 0. 0. 32,4 = 6,1961199.
49) log sin 0. 1. 0,5 = 6,4673303.
50) log tang 0. 0. 59,99 = 6,4636538.

Regel 6: Für Winkel bis zu 2°44′ kann man zunächst den log cos aufsuchen, das Complement desselben berechnen, die geltenden Ziffern des letzteren (d. i. diejenigen, welche auf die Anfangs-Nullen folgen) als Hilfsdifferenz D annehmen, und dann ohne Fehler in der 7. Decimalstelle $\log \sin x = \log x - \frac{1}{3} D$, $\log \operatorname{tang} x = \log x + \frac{2}{3} D$ setzen.

51) log sin 2° 15′ 16″ = 8,5948048.
52) log tang 1. 0. 4,6 = 8,2424762.
53) log cos 87. 31. 12 = 8,6361935.
54) log sin 1. 18. 12,0 = 8,3568954.
55) log sin 2. 43. 59 = 8,6783611.
56) log tang 2. 0. 15,31 = 8,5440071.

Winkel höherer Quadranten:

57) log cos 104° 7′ 10″ = 9,3872904 *n*
58) log sin 154. 8. 13,5 = 9,6397051
59) log cotg 90. 12. 11 = 7,5494941 *n*
60) log tang 112. 14. 32 = 10,3883274 *n*
61) log sin 132. 59. 48,7 = 9,8641497
62) log sin 196. 13. 48,9 = 9,4463788 *n*
63) log tang 180. 0. 10,75 = 5,7169834
64) log tang 283. 17. 0,75 = 10,6269284 *n*
65) log cotg 270. 4. 58,25 = 7,1601554 *n*
66) log sin 288. 19. 39,72 = 9,9773913 *n*

II. Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Functionen.

(Umkehrungen früherer Regeln und Beispiele.)

67) $\log \sin x = 9,4919216$;
$x = 18^0 5' 0'',00$ oder $161^0 55' 0'',00$; $378^0 5'$, u. s. w.

68) $\log \operatorname{cotg} x = 9,8409174$;
$x = 55^0\ 16'\ 0'',00$ oder $235^0\ 16'\ 0'',00$.

69) $\log \sin x = 9,6434356$;
$x = 26^0\ 6'\ 10'',01$ oder $153^0\ 53'\ 59'',99$.

70) $\log \cos x = 9,8457663$;
$x = 45^0\ 29'\ 11'',20$ oder $314^0\ 30'\ 48'',80$.

71) $\log \tan x = 10{,}3051170$;
$x = 63^0\ 39'\ 0'',06$ oder $243^0\ 39'\ 0'',06$.

72) $\log \cot x = 10{,}6723910n$;
$x = 167^0\ 59'\ 47'',00$ oder $347^0\ 59'\ 47'',00$.

73) $\log \sin x = 8{,}2460568n$;
$x = 181^0\ 0'\ 35'',00$ oder $358^0\ 59'\ 25'',00$.

74) $\log \cos x = 9{,}9999999$;
$x = 0^0\ 1'\ 40'' - 0^0\ 2'\ 50''$, u. s. w.

75) $\log \tan x = 6{,}4179999$;
$x = 0^0\ 0'\ 54'',004$ oder $180^0\ 0'\ 54'',004$.

76) $\log \cos x = 7{,}2760049$;
$x = 89^0\ 53'\ 30'',57$ oder $270^0\ 6'\ 29'',43$.

III. Aufschlagen von Functionen zu gegebenen Functionen.

	gegeben	gesucht
77)	$\log \sin x = 9{,}4920183$; gesucht:	$\log \cos x = 9{,}9779903$
78)	$\log \tan x = 9{,}8658585$	$\log \sin x = 9{,}7722167$
79)	$\log \sin x = 9{,}8474756$	$\log \cot x = 10{,}0040005$
80)	$\log \cot x = 9{,}5819011$	$\log \tan x = 10{,}4180989$
81)	$\log \sin x = 9{,}9990458$	$\log \tan x = 11{,}1780884$
82)	$\log \cos x = 9{,}6175883$	$\log \cot x = 9{,}6585367$
83)	$\log \cos x = 7{,}0836000$	$\log \sin x = 9{,}9999997$
84)	$\log \cos x = 9{,}9901212$	$\log \tan x = 9{,}3339320$
85)	$\log \tan x = 9{,}8612633$	$\log \cos x = 9{,}9079568$
86)	$\log \cos x = 9{,}9999991$	$\log \sin x = \left.\begin{matrix}7{,}2983584\\7{,}3190430\end{matrix}\right\}$?
	und umgekehrt.	

B. Beispiele für den Gebrauch fünfstelliger Tafeln.

I. Aufschlagen der Logarithmen von Functionen gegebener Winkel.

a) ohne Interpolation: Man bediene sich der für siebenstellige Tafeln unter *a.* gegebenen Beispiele, indem man in den Resultaten derselben die zwei letzten Stellen abstreicht und auf die zuweilen nöthig werdende Erhöhung der 5. Decimale um eine Einheit achtet.
In ähnlicher Weise kann man die im Folgenden gegebenen Beispiele mit den entsprechend im Vorstehenden angeführten genaueren siebenstelligen Werthen vergleichen.

b) mit Interpolation: Regel 1: Da die fünfstelligen Tafeln meist nicht die Differenzen für eine Secunde, sondern für eine Minute enthalten, so hat man, wenn d die letztere Differenz bezeichnet, $\frac{d}{60}$ mit der Secundenzahl p zu multipliciren. Geht man immer von dem zunächst liegenden Logarithmus der Tafel aus, so ist $\frac{d}{60} \cdot p$ zu addiren oder zu subtrahiren, je nachdem man sich einem grösseren oder einem

kleineren Logarithmus zu nähern hat. Bei der Berechnung von $\frac{d}{60} \cdot p$ im Kopfe benutze man jede mögliche Abkürzung durch Aufheben oder durch Correctionsfactoren nach den Formeln $\frac{d}{60} \cdot p = \frac{d+x}{60} \cdot p \frac{d}{d+x}$ $= \frac{d+x}{60} \cdot p - \frac{x}{60} \cdot p$, u. dgl. m., wobei Grössen, welche auf die letzte ganze Ziffer des Proportionaltheilchens keinen Einfluss haben, weggelassen werden, z. B.

$\frac{31}{60} \cdot 17 = \frac{31}{60} \cdot 15 + \frac{31}{60} \cdot 2 = \frac{31}{4} + \frac{31}{30}$, 7,8 + 1; 9; oder $\frac{31}{60} \cdot 17 = \frac{17}{2} + \frac{17}{60} = 8{,}5 + \frac{17}{60}$, 9. U. dgl. m.

87)	log sin	32° 13′ 18″	=	9,72689
88)	cos	42. 15. 10	=	9,86934
89)	tang	57. 12. 9	=	10,19085
90)	cos	76. 13. 12,75	=	9,37692
91)	sin	80. 33. 11	=	9,99407
92)	sin	10. 36. 25	=	9,26498
93)	cos	10. 36. 25	=	9,99251
94)	cotg	36. 24. 11,1	=	10,13233
95)	tang	38. 32. 10	=	9,90116
96)	cotg	79. 59. 0,2	=	9,24706
97)	cotg	74. 46. 59	=	9,43459
98)	sin	12. 9. 50	=	9,32368
99)	cos	23. 15. 49,4	=	9,96317
100)	tang	43. 59. 59,5	=	9,98484
101)	sin	65. 18. 50,1	=	9,95838
102)	tang	71. 30. 30	=	10,47569
103)	cotg	26. 23. 41	=	10,30426
104)	cos	55. 23. 48	=	9,75427
105)	cos	34. 34. 40	=	9,91559
106)	cos	0. 30. 55	=	9,99998.

Regel 2: Bei Winkeln unter 2° können bei fünfstelligen Tafeln die Veränderungen der Logarithmen der Sinus und Tangenten nicht mehr proportional den Veränderungen des Bogens angenommen werden. Daher wird man sich für die Interpolation an dieser Stelle der Tafel (d. h. auch für die betreffenden Functionen der Winkel über 88°) des unter Regel 4 bei den siebenstelligen Tafeln beschriebenen Verfahrens mit der Secundensumme bedienen.

107)	log sin	1° 30′ 15″	=	8,41913
108)	cos	88. 34. 12	=	8,39717
109)	tang	0. 52. 57	=	8,18763
110)	cotg	89. 24. 13	=	8,01742
111)	cos	88. 9. 14	=	8,50806
112)	sin	1. 3. 21	=	8,26545.

Regel 3: Für Winkel bis zu $0^0\ 13'$ kann man bis auf die fünfte Decimale genau $\log \sin x = \log \operatorname{tang} x = \log x$, d. i. gleich dem Logarithmus der Secundensumme minus 5,31443 setzen.

113) log sin $0^0\ 10'\ 20'' = 7{,}47796$
114) tang $0.\ 8.\ 14 = 7{,}37930$
115) tang $0.\ 5.\ 21 = 7{,}19208$
116) sin $0.\ 0.\ 44 = 6{,}32902$.

Regel 4: Der für siebenstellige Tafeln unter Regel 6 angegebene Kunstgriff mit der Hilfsdifferenz D lässt sich ohne Fehler in der fünften Decimale bis zu $8^0\ 32',5$ anwenden, und es können daher auch die Regeln 2 und 3 für fünfstellige Tafeln durch diese ersetzt werden.

117) log sin $1^0\ 15'\ 47'' = 8{,}34325$
118) tang $0.\ 29.\ 52 = 7{,}93892$
119) cos $88.\ 9.\ 31 = 8{,}50695$
120) cotg $89.\ 34.\ 58 = 7{,}86225$
121) sin $0.\ 45.\ 25 = 8{,}12093$
122) tang $0.\ 15.\ 18 = 7{,}64841$.

II. Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Functionen.

Benutzung der Beispiele A. 67—76 mittelst Abkürzung der gegebenen Logarithmen auf 5 Decimalen und Abrundung der Resultate auf ganze Secunden. Umkehrung der Beispiele B. 87—122. Ausserdem:

123) $\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}59056$;
$\alpha = 21^0\ 17'\ 0''$ oder $201^0\ 17'\ 0''$.

124) $\log \sin \alpha = 9{,}72582$;
$\alpha = 32^0\ 8'\ 0''$ oder $147^0\ 52'\ 0''$.

125) $\log \sin \alpha = 9{,}94516$;
$\alpha = 61^0\ 48'\ 30''$ oder $118^0\ 11'\ 30''$.

126) $\log \cos \alpha = 9{,}27863n$;
$\alpha = 100^0\ 56'\ 59''$ oder $259^0\ 3'\ 1''$.

127) $\log \operatorname{cotg} \alpha = 10{,}58479$;
$\alpha = 14^0\ 34'\ 54''$ oder $194^0\ 34'\ 54''$.

128) $\log \sin \alpha = 8{,}44444$;
$\alpha = 1^0\ 35'\ 40''$ oder $178^0\ 24'\ 20''$.

III. Aufschlagen von Functionen zu gegebenen Functionen.

Abrundung der Beispiele A. 77—86 auf 5 Decimalen und ganze Secunden. Ausserdem:

129) $\log \operatorname{tang} x = 9{,}50000$;
gesucht $\log \sin x = 9{,}47930$, $\log \cos x = 9{,}97930$.

130) $\log \cos x = 9{,}99626$;
gesucht $\log \operatorname{tang} x = 9{,}11992$, $\log \sin x = 9{,}11618$.

131) $\log \sin x = 9,36830$;
gesucht $\log \cos x = 9,98782$, $\log \operatorname{cotg} x = 10,61953$
und umgekehrt.

C. Berechnung von Formeln mit Hilfe der Tafeln.

132. Die Höhe des freien Falles aller Körper im leeren Raume in einer Secunde ist unter der geographischen Breite φ in englischen Zollen gleich $193,033088 - 0,5006307 \cos 2\varphi$. Wie gross ist sie unter der Breite von $56^0\, 39'\, 4'',5$?

133. Setzt man das Verhältniss der Schwere unter der geographischen Breite φ zu der Schwere unter dem Aequator gleich $1 : \sqrt{1 - 0,0065467149 \sin \varphi^2}$, wie viele Male ist dann die Schwere unter der Breite $83^0\, 50'\, 30''$ grösser als unter der Breite $45^0\, 0'\, 42''$?

134. Man findet die Entfernung l zweier Orte auf der Erde in geographischen Meilen, wenn man zuerst mittelst der Gleichung $\cos \varphi = \sin b \,.\, \sin b' + \cos b \,.\, \cos b' \,.\, \cos (a' - a)$ aus der Länge a und der Breite b des einen und der Länge a' und der Breite b' des anderen Orts den Winkel φ in Graden und Decimaltheilen des Grades und dann $l = 15\varphi$ berechnet. Wie weit ist demnach Leipzig ($30^0\, 2'$ L., $51^0\, 20'$ Br.) von Wien ($34^0\, 3'$ L., $48^0\, 43'$ Br.) entfernt?

135. Die genaue Formel für die Schwingungszeit t eines mathematischen Pendels, dessen Länge gleich l, und dessen Elongationswinkel gleich α ist, lautet:

$$t = \pi \,.\, \sqrt{l : g} \,.\, \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 .\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^6 + \ldots\right\}.$$

Es sei nun $\alpha = 16^0$; man soll berechnen, um wieviel die nach dieser genaueren Formel bestimmte Schwingungszeit von der nach der angenäherten Formel $t = \pi \sqrt{l : g}$ berechneten abweicht. (5 Decimalen.) $\pi = 3,1415926\ldots$, $g = 10$ Meter.

136. Wird ein Körper unter dem Winkel α gegen den Horizont aufwärts geworfen, so ist die Wurfweite gleich $c^2 . \sin 2\alpha : g$, wenn c die durch die Wurfkraft dem Körper ertheilte Geschwindigkeit (der in einer Secunde durch dieselbe zurückgelegte Weg) ist. Man berechne die Wurfweite für $\alpha = 42^0\, 20'$, $g = 10^m$, $c = 600^m$.

D. Vermischte Aufgaben zum Gebrauch der Tafeln.

137. Man soll mit Hilfe des aus den trigonometrischen Tafeln zu entnehmenden Zahlenwerthes einer Function eines in Zahlen gegebenen Winkels diesen Winkel construiren. Beispiele: $35^0\ 45'$ durch die Tangente, $63^0\ 0'$ durch den Cosinus, $62^0\ 15'$ durch den Sinus. Anwendung von 3 Decimalstellen genügt im Allgemeinen.

138. Wie kann man die vorstehende Aufgabe bequemer mittelst des doppelten Sinus des halben Winkels lösen?

139. Wie kann man umgekehrt auf leichte Weise die Grösse eines durch Construction gegebenen Winkels mittelst Längenmessungen und der trigonometrischen Tafeln in Gradmass bestimmen?

140. Gegeben sei $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tang} \beta = \frac{1}{3}$, gesucht die Bogen $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ in Theilen des Radius.

141. Der Bogen b sei gleich $\frac{2}{7}$ des Radius; wie gross ist $\operatorname{tang} b$?

142. Einen Winkel von 60^0 in zwei Theile zu theilen, deren Sinus sich wie $3 : 2$ verhalten. — Verallgemeinerung dieser Aufgabe. Aehnliche Aufgabe für die Tangenten.

143. Mittelst der trigonometrischen Tafeln einen gegebenen und genau gemessenen Winkel näherungsweise in drei gleiche Theile zu theilen.

Anhang 2: Goniometrische Reihen.

1. Die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{7!} + \dots$$

zu finden.

2. Ebenso zu summiren:

a) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} - \dots$

b) $2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots$

3. Ebenso: $3^{-1} - \frac{1}{3} . 3^{-3} + \frac{1}{5} . 3^{-5} - \dots$

4. Ebenso $(1 \pm 5^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(1 \pm 5^{-\frac{3}{2}}) + \frac{1}{5}(1 \pm 5^{-\frac{5}{2}}) - \dots$

5. Die Ausdrücke a) $\frac{1}{2}(x . \cos x - \sin x)$; b) $\frac{1}{2}(x . \cos x + \sin x)$ in unendliche Reihen zu entwickeln.

6. $\frac{\text{arc tg } x - \text{arc tg } y}{x - y}$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

7. Die Summe der n ersten Glieder der folgenden Reihe zu bestimmen: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots$

8. Ebenso für $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$

9. Ebenso für $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots$

10. Die Reihe $\cos x . \cos y + \cos 2x . \cos 2y + \cos 3x . \cos 3y + \ldots + \cos nx . \cos ny$ zu summiren.

11. $\sin nx$ durch $\sin x$ und $\cos x$ auszudrücken.

12. Ebenso $\cos nx$.

13. $\text{tang}\, nx$ durch $\text{tang}\, x$ auszudrücken.

14. Die Formel $\cos 2\alpha = 2 \cos \alpha^2 - 1$ mittelst **a**) der Reihe, **b**) des Exponential-Ausdruckes für $\cos x$ zu beweisen.

15. Zu beweisen: $\cos x . \cos 2x . \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1} x = \sin (2^n x) : (2^n \sin x)$.

Anhang 3: Gebrauch der Hilfswinkel für logarithmische Rechnungen.

Vergl. §. 4, Anleitung vor Aufgabe 60.

a. Auflösung quadratischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die Anwendung der nachstehend angegebenen Methoden empfiehlt sich dann, wenn nicht die Zahlen p, q selbst, sondern deren Logarithmen gegeben, und wenn ebenso die Logarithmen der Wurzeln der Gleichung verlangt sind. Im anderen Falle ist die Berechnung ohne Hilfswinkel bequemer.

Auch ausserdem wird der Gebrauch der letzteren für numerische Rechnungen in den meisten Fällen überhaupt durch die Anwendung der Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen entbehrlich. Gleichwohl wird man auch die nachstehenden Methoden hier und da nicht gern vermissen und dieselben zur Uebung im Gebrauch der Hilfswinkel und für weitere Anwendungen nützlich finden.

In den folgenden Beispielen werden, der obigen Bemerkung entsprechend, die Logarithmen von p und q als gegeben vorausgesetzt. Es ist jedoch das Aufschlagen derselben dem Leser überlassen worden, nicht bloss der Vergleichung mit der directen Lösung wegen, sondern auch um je nach Wunsch verschiedenartige Logarithmentafeln zu gebrauchen.

$$x^2 \pm px - q = 0; \quad \frac{2\sqrt{q}}{p} = \text{tang}\, \varphi;$$

$$x_1 = \pm \sqrt{q}\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\varphi, \quad x_2 = \mp \sqrt{q} \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

1. $x^2 + 4x = 3{,}242909.$ 2. $x^2 + 458x = 294849.$

3. $x^2 + 359x = 67704{,}04.$ 4. $x^2 + 3278x = 83521.$

5. $x^2+129x=40,96.$
6. $x^2+546x=44521.$
7. $x^2+0,1x=0,06.$
8. $x^2+21x-11880=0.$
9. $x^2-9702x=11115556.$
10. $x^2-40x=127,69.$
11. $x^2-20x=37,21.$
12. $x^2-50x=234,09.$
13. $5x=(3x+7):6x.$
14. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}=\frac{1}{x}+4\frac{2}{3}.$
15. $x^2-4x=21.$
16. $x^2-3,98x-0,08=0.$

$$x^2 \pm px+q=0;\ 4q<p^2;\ \frac{2\sqrt{q}}{p}=\sin\varphi;$$

$$x_1=\mp\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi,\quad x_2=\mp\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

17. $x^2+50x=-81.$
18. $x^2+4x+1,11=0.$
19. $x^2+10x+11,6281=0.$
20. $x^2+500x=-38809.$
21. $x^2-12x+6,889=0.$
22. $x^2=1000x-182329.$
23. $x^2-8x+13,69=0.$
24. $0,107(x^2+3)=2x.$

$$x^2 \pm px+q=0;\ 4q>p^2;\ \frac{p}{2\sqrt{q}}=\cos\varphi;$$

$$x_1=\mp\frac{p}{2}+\sqrt{q}\,.\sin\varphi\sqrt{-1};\ x_2=\mp\frac{p}{2}-\sqrt{q}\,.\sin\varphi\sqrt{-1}.$$

25. $x^2+10x+178,2=0.$
26. $x^2+10x=-142,2.$
27. $x^2-5x=-39,4.$
28. $x^2-2x+7,4=0.$

$$x^2+px+q=0;\ \mathrm{tang}\,(\varphi+\psi)=-\frac{p}{1-q},$$

$$\cos(\varphi-\psi)=\frac{1+q}{1-q}\cdot\cos(\varphi+\psi)=-\frac{1+q}{p}\sin(\varphi+\psi),$$

$$x_1=\mathrm{tang}\,\varphi,\quad x_2=\mathrm{tang}\,\psi.$$

29. $5x^2+7x+156=4x^2-18x.$
30. $x^2+2,2113x+1,2058596=0.$
31. $x^2+1,5x+0,5=0.$
32. $x^2-1,17657x=-0,34608.$

33. $x^2-3x+2=0.$
34. $x^2-9x+20=0.$
35. $x^2+4x-12=0.$
36. $x^2+11x+30=0.$
37. $x^2-25,9x+20,08=0.$
38. $x^2+986,99x-9,87=0.$
39. $x^2-\frac{3}{10}x=\frac{3}{2}+7x.$
40. $x^4+5x^2-126=0.$
41. $x-\sqrt{x}-2=0.$
42. $x^2+x-6=0.$
43. $3x+4+5x+5+2\sqrt{15x^2+23x+20}=81.$

Aufgaben zur Zusammenstellung mit geometrischer (graphischer) Lösung.

(Nachweis des Winkels φ in der Figur und Ableitung der obigen Formeln aus dieser. Deutung der doppelten Lösung.)

44. $x^2 + ax = a^2$. Eine gegebene Strecke nach dem goldenen Schnitt zu theilen. Eine Strecke so zu theilen, dass das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich der Differenz der Quadrate über denselben sei. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gegeben ist und die zweite Kathete das geom. Mittel zwischen den beiden ersteren Seiten sein soll. Eine Strecke so zu theilen, dass der kleinere Abschnitt das geom. Mittel zwischen dem grösseren und der Differenz der beiden Abschnitte ist. Eine Strecke so zu theilen, dass das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Rechteck aus der ganzen Strecke und der Differenz ihrer Abschnitte ist. Eine gegebene Sehne eines Kreises so zu verlängern, dass die von dem Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente gleich der Sehne wird. Im Dreieck ABC die Linie XY parallel zu BA zu ziehen, so dass $\triangle CXY = \triangle BAX$ wird, u. dgl. m.

45. $x^2 = 2 \cdot (a - x)^2$. Eine Strecke so zu theilen, dass das Quadrat über dem grösseren Abschnitt doppelt so gross sei, als das Quadrat über dem kleineren. Eine Strecke so zu theilen, dass der kleinere Abschnitt das geometrische Mittel zwischen der ganzen Strecke und der Differenz der Abschnitte ist. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe der Hypotenuse und einer Kathete zu construiren.

46. $x^2 = 4a \cdot (a - x)$. Eine Strecke so zu theilen, dass das Quadrat über dem einen Abschnitt viermal so gross sei, als das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem anderen Abschnitt. Ein rechtwinkeliges Dreieck über einer gegebenen Hypotenuse zu construiren, so dass die Projection der einen Kathete auf die Hypotenuse viermal so gross sei, als der Ueberschuss der Hypotenuse über jene Kathete. In einem Kreise ist ein Durchmesser AB gegeben und durch B ist eine Tangente an den Kreis gelegt. Man soll einen Kreis construiren, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie des ersteren liegt, und welcher durch A geht und die Tangente berührt.

47. $x\,.\,(a - x) = [x - (a - x)]^2$. Eine Strecke so zu theilen, dass das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrate über ihrer Differenz sei.

48. $\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{1}{2}$. Eine Strecke so zu theilen, dass das Quadrat über dem einen Abschnitt halb so gross sei, als das Quadrat über dem anderen.

49. Eine Sehne eines gegebenen Kreises so zu verlängern, dass die von dem Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente eine gegebene Länge habe.

50. Auf einer Strecke AB ist ein Punkt C gegeben; es soll ein zweiter Punkt X auf ihr so bestimmt werden, dass $AC : CX = CX : BX$ ist.

b. Auflösung einiger quadratischer Gleichungen mit 2 Unbekannten.

51. $x + y = a$; $x\,.\,y = b$. Setze $x = \sqrt{b}\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi$, berechne $\sin 2\varphi$. Für $4b > a^2$ setze $x = \sqrt{b}\,.\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)$ und bestimme $\cos\varphi$. $a = 32{,}137$, $b = 241{,}644$.

52. $x + y = a$; $x\,.\,y = -b$. Setze $x = -\sqrt{b}\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi$, suche $\mathrm{tang}\,2\varphi$. $a = 4{,}76097$, $b = 1{,}19514$.

53. $x^2 + y^2 = m$; $x\,.\,y = n$. Setze $x = \sqrt{m}\,.\,\sin\varphi$ und bestimme $\sin 2\varphi$; im Falle, dass dies nicht möglich, setze $x = \sqrt{n}\,.\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ und suche $\cos 2\varphi$. $m = 99{,}22$, $n = 10{,}89$.

54. $x^2 + y^2 = m$; $x + y = n$. Mittelst $x = \sqrt{m}\,.\,\sin\varphi$ und Bestimmung von $45^0 \pm \varphi$, im ungünstigen Fall mittelst $x = \frac{1}{2}n(1 + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ und Bestimmung von $\cos\varphi$. $m = 2{,}9$, $n = 2{,}4$.

55. $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) = m : n$; $x.y = p$. Setze $y = x\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi$, bestimme $\cos 2\varphi$ aus m und n, dann x durch p und φ. $m = 25$, $n = 7$, $p = 48$.

56. $(x + y) : (x - y) = a : b$; $x^2 - y^2 = m^2$. Setze $y = x\,.\,\cos\varphi$, bestimme $\frac{1}{2}\varphi$, dann x durch m und φ. $a = 4$, $b = 1$, $m = 24$.

Aehnlich: 57. $x - y = a$; $x\,.\,y = b$.

58. $x^2 + y^2 = m$; $x - y = n$.

59. $(x + y) : (x - y) = a : b$; $x^2 + y^2 = m^2$.

60. $x^2 + axy + y^2 = b^2;\ nxy = q.$

61. $x - y = a(1 + xy);\ x + y = b\sqrt{1 + x^2}\,.\sqrt{1 + y^2}.$

c. **Reciproke** Gleichungen höheren Grades, welche sich auf Gleichungen zweiten Grades zurückführen lassen.

62. $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

Man dividire die Gleichung durch x^2, setze $x + \frac{1}{x} = y$; $y' + y = -a$, $y' . y'' = b - 2$, $y' = \sqrt{b-2}\,.\,\text{tang}\,\varphi$, also $y'' = \sqrt{b-2}\,.\,\text{cotg}\,\varphi$, bestimme 2φ und hierauf y' und y'', setze sowohl y' als y'' gleich $x + \frac{1}{x}$, in den entstandenen Gleichungen dann $x' = -\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$, so ergiebt sich $x'' = -\text{cotg}\,\frac{1}{2}\psi$ und man kann dann $\sin\psi$ bestimmen. Für imaginäre Wurzeln setze $x' = \cos\psi + i.\sin\psi$, $x'' = \cos\psi - i.\sin\psi$ und suche $\cos\psi$.

Aehnlich $x^4 + ax^3 - bx^2 + ax + 1 = 0.$

α) $x^4 + 1{,}5x^3 - 8x^2 + 1{,}5x + 1 = 0.$

β) $x^4 - 3x^3 + \frac{8}{9}x^2 - 3x + 1 = 0.$

γ) $x^4 + 5x^3 - 51{,}04x^2 + 5x + 1 = 0.$

δ) $x^4 - 12x^3 + 23\frac{1}{36}x^2 - 12x + 1 = 0.$

ε) $x^4 - 12x^3 + 24\frac{3}{4}x^2 - 12x + 1 = 0.$

ζ) $144\,x^4 - 432x^3 + 563x^2 - 432x + 144 = 0.$

63. $x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0.$

Lässt sich durch Absonderung des Factors $x^2 - 1$ auf die vorige Aufgabe zurückführen.

d. Auflösung cubischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

$$x^3 + px \pm q = 0;\ \text{tang}\,\alpha = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}},\ \text{tang}\,\beta = \sqrt[3]{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha};$$

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{cotg}\,2\beta;\ x_2 = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,\frac{\cos 2\beta + \sqrt{-3}}{\sin 2\beta};$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,\frac{\cos 2\beta - \sqrt{-3}}{\sin 2\beta}.$$

64. $x^3 + 162x - 5805 = 0.$ 65. $x^3 + 48x - 504 = 0.$

66. $x^3 + 24x - 511 = 0.$ 67. $x^3 + 54x - 721 = 0.$

68. $x^3 + 36x + 1727 = 0.$ 69. $x^3 + 36x + 208 = 0.$

70. $x^3 + 54x = 288.$ 71. $x^3 + 72x = 400.$

72. $x^3 + 11x = 828.$ 73. $x^3 + 7680x + 4091904 = 0.$

74. $x^3 + \frac{3}{4}m^2x = 2m^3.$

$$x^3 - px \pm q = 0;\ 4p^3 \overline{<} 27q^2;\ \sin\gamma = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}:$$

$$\operatorname{tang}\delta = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma}.$$

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} : \sin 2\delta;\ x_2 = \pm\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1 + \cos 2\delta\sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1 - \cos 2\delta\sqrt{-3}}{\sin 2\delta}.$$

75. $x^3 - 27x + 246 = 0.$ 76. $x^3 - 18x + 110 = 0.$
77. $x^3 - 6x - 9 = 0.$ 78. $x^3 - 48x - 520 = 0.$
79. $x^3 - 162x = 5859.$ 80. $x^3 - 30x = 133.$
81. $x^3 - 18x - 217 = 0.$ 82. $x^3 - 54x + 342 = 0.$
83. $x^3 - 72x + 464 = 0.$ 84. $x^3 - 90x = -590.$
85. $x^3 - 7x = 90.$ 86. $x\,.\,(x^2 - 9) = x + 1608.$
87. $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{49}{6}x - \frac{301}{24} = 0.$

$$x^3 - px \pm q = 0;\ 4p^3 \overline{\overline{>}} 27q^2;\ \sin 3\varepsilon = \frac{3q}{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$$

(Irreducibeler Fall.)

$$x_1 = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\varepsilon;\ x_2 = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin(60^0 - \varepsilon);$$

$$x_3 = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin(60^0 + \varepsilon).$$

88. $x^3 - 7x - 6 = 0.$ 89. $x^3 - 39x - 70 = 0.$
90. $x^3 - 63x + 162 = 0.$ 91. $x^3 - 112x + 384 = 0.$
92. $x^3 - 363x - 2662 = 0.$ 93. $x^3 - 0{,}13x + 0{,}012 = 0.$
94. $x^3 - 40{,}769092\,x - 48{,}429978624 = 0.$
95. $x^3 - 12{,}8509\,x + 11{,}5527 = 0.$
96. $x^3 - 9{,}0025\,x + 10{,}005 = 0.$
97. $x^3 - 9x - 10 = 0.$ 98. $x^3 - 3x + 1 = 0.$
99. $a = 3x - 4x^3.$

Vollständige cubische Gleichungen. α) reducirbare:

100. $5x^3 - 21x = 3x^2 + 17x + 2243{,}52.$
101. $x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0.$
102. $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0.$
103. $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 8x - 464 = 0.$

β) irreducibele:

104. $x^3 - 39x^2 + 507x - 2197 = 0.$
105. $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0.$
106. $x^3 + 15x^2 + 71x + 105 = 0.$
107. $x^3 - 10x^2 + 3x + 54 = 0.$

108. $x^3 + 2x^2 - 101x - 462 = 0.$

109. $x^3 - 12,8x^2 + 51,29x - 62,422 = 0.$

110. $x^3 + 215,465x^2 + 313,505596x - 0,942456 = 0.$

e. Sonstige Hilfswinkel.

Gegeben sind $\log a$, $\log b$, u. s. w. Gesucht wird mittelst trig. Functionen von Hilfswinkeln $\log x$ für

111. $x = \sqrt{a + b}.$ 112. $x = \sqrt{a - b}.$

113. $x = a + b - c + d.$ 114. $x = \frac{a - b}{a + b}.$

115. $x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$ 116. $x = \sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}.$

117. $x = \sqrt[m]{a^n - b^n}.$ 118. $\sqrt{a^2 + b^2}.$

119. $x = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab\cos\alpha^2}.$

120. $a \,.\, \sin\alpha - b \,.\, \sin\beta$ auf die Form $x \,.\, \sin\varphi$ zu bringen.

121. Ebenso $a \,.\, \cos\alpha - b \,.\, \cos\beta$ auf die Form $x \,.\, \cos\varphi$.

122. Ebenso $a \,.\, \mathrm{tang}\,\alpha - b \,.\, \mathrm{tang}\,\beta$ auf die Form $x \,.\, \mathrm{tang}\,\varphi$.

123. $x = a\sqrt{\mathrm{tang}\,\alpha + \sin\alpha} + b\sqrt{\mathrm{tang}\,\alpha - \sin\alpha}.$

Die Aufgabe, die Gleichung $a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x = c$ mittelst eines Hilfswinkels aufzulösen, ist in der Anleitung, Seite 16 behandelt.

f. Gebrauch der logarithmischen und trigonometrischen Differenzen zur indirecten Auflösung von Gleichungen.

124. Aus der Gleichung $\alpha = a + b \,.\, \sin\alpha$ soll α gefunden werden. Es sei $a = 332^0\,28'\,55''$; $b = 14^0\,3'\,20'' = 50600''$, also $\log b = 4,70415(05)$.

1. Annahme: $\alpha = 330^0 + x'$

$$\begin{aligned}
\log\sin\alpha &= 9,69897n - 22\,x \\
\log b &= 4,70415 \\
\hline
\log(b \,.\, \sin\alpha) &= 4,40312n - 22\,x \\
b \,.\, \sin\alpha &= -25300'' + 22\,x \,.\, \frac{10''}{17} \\
&= -7^0\,1'\,40'' + 13\,x'' \\
a + b \,.\, \sin\alpha &= 325^0\,27'\,15'' + 13\,x'' \\
&= 330^0 \qquad + 60\,x'' \\
\hline
47\,x'' &= -4^0\,32'\,45'' = -16365'' \\
x'' &= -348 \\
x' &= 5^0\,48'.
\end{aligned}$$

2. Annahme: $\alpha = 324^0\ 12' + y''$

$$\log \sin \alpha = 9{,}76712n - \frac{17{,}5}{60}y$$
$$\log b \quad = 4{,}70415$$
$$\log (b \,.\, \sin \alpha) = 4{,}47127n - \frac{17{,}5}{60}y$$
$$b \,.\, \sin \alpha = -29599'' + \frac{17{,}5}{60}y \,.\, \frac{10''}{15}$$
$$= -8^0\ 13'\ 19'' + 0{,}19\,y''$$
$$a + b \,.\, \sin \alpha = 324^0\ 15'\ 36'' + 0{,}19\,y''$$
$$= 324^0\ 12' \qquad + \qquad y''$$
$$0{,}81\,y'' = 3'\ 36'' = 216''$$
$$y'' = 267'' = +\ 4'\ 27''.$$

3. Annahme: $a = 324^0\ 16'\ 27'' + z''$

$$\log \sin \alpha = 9{,}7663439n - 29{,}27\,z''$$
$$\log b \quad = 4{,}7041505$$
$$\log (b \,.\, \sin \alpha) = 4{,}4704944\,n - 29{,}27\,z''$$
$$b \,.\, \sin \alpha = -\ 29545'',7 + \frac{29{,}27}{147}z''$$
$$= -\ 8^0\ 12'\ 25'',7 + 0{,}1992\,z''$$
$$a + b \sin \alpha = 324^0\ 16'\ 29'',3 + 0{,}1992\,z''$$
$$= 324^0\ 16'\ 27'' \quad + \qquad z''$$
$$0{,}8008\,z'' = +2'',3;\ z'' = +\ 2'',87.$$

4. Annahme: $\alpha = 324^0\ 16'\ 29'',87 + u''$

$$9{,}7663354n + 29{,}27\,u''$$
$$4{,}7041505$$
$$4{,}4704859n + 29{,}27\,u''$$
$$-\ 8^0\ 12'\ 25'',13 + \frac{29{,}27}{147}u''$$
$$324^0\ 16'\ 29'',87 + 0{,}1992\,u''$$
$$= 324^0\ 16'\ 29'',87 + \qquad u''$$
$$0{,}8008\,u'' = 0'',00\ ..$$
$$\alpha = 324^0\ 16'\ 29'',87.$$

125. $x + 5^0 \sin x = 72^0$. Gesucht x.

1. Annahme: $x = 68^0 + x'$

$$\log \sin x = 9{,}96717 + 5x'$$
$$\log 300 \ = 2{,}47712$$
$$2{,}44429 + 5x'$$
$$278' + \frac{5}{156}x' = 4^0\ 38' + \frac{5}{156}x'$$
$$72^0 \cdot 38' + \frac{161}{156}x' = 72^0;\ -\frac{38 \,.\, 156}{161} = x' = -\ 37'$$

2. Annahme: $x = 67^0\,23' + y''$

$$9{,}96525 + \frac{5}{60}\,y''$$

$$\log 18000 = 4{,}25527$$

$$4{,}22052 + \frac{5}{60}\,y''$$

$$16616'' + \frac{5}{60}\cdot\frac{10}{26}\,y''$$

$$4^0\,36'\,56'' + 0{,}032\,y''$$

$$71^0\,59'\,56'' + 1{,}032\,y'' = 72^0$$

$$y = \frac{4}{1{,}032} = +\,3'',9.$$

3. Annahme: $x = 67^0\,23'\,4'' + z''$

$$9{,}9652515 + 8{,}77\,z$$

$$4{,}2552725$$

$$4{,}2205240 + 8{,}77\,z$$

$$16615{,}9 + \frac{8{,}77}{262}\,z''$$

$$4^0\,36'\,55'',9 + 0{,}034\,z''$$

$$71^0\,59'\,59'',9 + 1{,}034\,z'' = 72^0$$

$$z = +\,\frac{0{,}1}{1{,}034} = +\,0'',09.$$

126. $x^0 : \sin x^2 = 80^0$. Gesucht x. $(80^0 = 4800'.)$

1. Annahme: $x = 50^0 + x'$

$$= 3000' + x'$$

$$\log x = 3{,}47712 + 15\,x'$$

$$\log \sin x^2 = 9{,}76850 + 22\,x'$$

$$3{,}70862 - 7\,x'$$

$$= 3{,}68124$$

$$7\,x' = +\,0{,}02738$$

$$x' = +\,391' = +\,6^0\,31'$$

2. Annahme: $x = 56^0\,31' + y'$

$$= 3391' + y'$$

$$\log x = 3{,}53033 + 13\,y$$

$$\log \sin x^2 = 9{,}84238 + 16\,y$$

$$3{,}68795 - 3\,y$$

$$= 3{,}68124$$

$$3\,y = 671'$$

$$y = 224' = +\,3^0\,44'.$$

3. Annahme: $x = 60^0\,15' + z'$

$$= 3615' + z'$$

$$\begin{aligned} \log x' &= 3{,}55811 + 12\,z \\ \log\sin x^2 &= \underline{9{,}87724 + 14\,z} \\ &\quad 3{,}68087 - 2\,z \\ &= 3{,}68124 \\ 2\,z &= -37' \\ z &= -18'\,30''. \end{aligned}$$

4. Annahme: $x = 59^0\,56'\,30'' + u''$

$$\begin{aligned} &= 3596',5 + u'' \\ \log x' &= 3{,}55588 + 12\,u \\ \log\sin x^2 &= \underline{9{,}87455 + 14\,u} \\ &\quad 3{,}68133 - 2\,u \\ &= 3{,}68124 \\ 2\,u &= +9' \\ u &= +4',5. \end{aligned}$$

5. Annahme: $x = 60^0\,1' + w''$

$$\begin{aligned} &= 216060'' + w'' \\ \log x'' &= 5{,}3345744 + 20{,}1\,w \\ \log\sin x^2 &= \underline{9{,}8752070 + 24{,}28\,w} \\ &\quad 5{,}4593674 - 4{,}18\,w \\ &\quad 5{,}4593925 = \log 288000'' \\ 4{,}18\,w &= -251'' \\ w &= -60''. \end{aligned}$$

6. Annahme: $x = 60^0\,0'\,0'' + q''$

$$\begin{aligned} &= 216000'' \\ \log x'' &= 5{,}3344538 + 20{,}1\,q \\ \log\sin x^2 &= \underline{9{,}8750612 + 24{,}3\,q} \\ &\quad 5{,}4593926 - 4{,}2\,q \\ &= 5{,}4593925 \\ 4{,}2\,q &= 1'' \\ q &= 0{,}2\,.. \end{aligned}$$

$$x = 60^0;\ \sin 60^0 = \sqrt{\frac{3}{4}};\ 60^0 : \frac{3}{4} = 80^0.$$

127. Denjenigen Bogen in Gradmass zu bestimmen, welcher seinem Cosinus gleich ist.

128. Den Centriwinkel und die Sehne desjenigen Kreissectors zu bestimmen, welcher durch letztere halbirt wird.

129. Es soll ein Quadrant durch eine Senkrechte auf einem der begrenzenden Radien halbirt werden; man suche den Centriwinkel zu dieser Senkrechten als Sinus.

130. Ein Halbkreis soll durch eine zu dem Durchmesser parallele Sehne halbirt werden; man berechne den zur Sehne gehörigen Centriwinkel.

131. Man bestimme in einem Quadranten den von einem Endpunkt desselben aus genommenen Bogen in Gradmass, dessen Sehne, wenn man sie bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung des durch den andern Endpunkt des Quadranten gehenden Radius verlängert, mit ihrer Verlängerung dem Bogen gleich ist.

132. Man berechne den Centriwinkel einer Sehne, welche den dritten Theil des Kreises von demselben abschneidet.

133. Auf dem einen der beiden Radien, welche einen Kreissector begrenzen, ist in seinem Endpunkt eine Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung des anderen von diesen Radien schneidet. Man suche den Centriwinkel des Sectors, wenn das entstandene rechtwinkelige Dreieck durch den Bogen halbirt wird.

134. $x^0 - 20^0 \cdot \cos x = 32^0$.

135. $x = 37^0\ 58'\ 25'',6 + 3^0\ 27'\ 12'' \cdot \sin x$.

136. $x + 5^0\ 3'\ 2'' \cdot \operatorname{tang} x = 83^0\ 0'\ 33'',6$.

137. Für welchen Winkel ist die Tangente gleich dem doppelten Bogen?

138. Für welchen Winkel ist die Summe des Sinus und des Cosinus gleich der Tangente?

g. Auflösung der Gleichung $x^m \pm a = 0$.

Bestimmung der mehrfachen Werthe einer Wurzel.

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{1}{m} x \pm i \cdot \sin \frac{1}{m} x;$$

$$\sqrt[m]{1} = \cos \frac{2n\pi}{m} \pm i \cdot \sin \frac{2n\pi}{m}, \text{ u. s. w.}$$

139. $x^3 - 1 = 0;\ x = 1;\ \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

140. $x^3 + 1 = 0;\ x = -1;\ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

141. $x^6 - 1 = 0;\ x = 1;\ -1;\ \frac{1}{2}(+1 \pm \sqrt{-3});$
$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

142. $x^6 + 1 = 0;\ x = \pm\sqrt{-1};\ \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{-1});$
$\frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1})$.

143. $x^5 - 1 = 0$; $x = 1$; $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} . \sqrt{-1})$;
$\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} . \sqrt{-1})$.

144. $x^5 + 1 = 0$; $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} . \sqrt{-1})$;
$\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} . \sqrt{-1})$; -1.

145. $x = \sqrt[15]{1} = 1$; $0{,}9135454 \pm 0{,}4067367\,i$; $0{,}6691306 \pm 0{,}7431449\,i$; $0{,}3090170 \pm 0{,}9510564\,i$;
$-0{,}1045285 \pm 0{,}9945219\,i$;
$-0{,}5 \pm 0{,}8660254\,i$; $-0{,}8090169 \pm 0{,}5877853\,i$; $-0{,}9781474 \pm 0{,}2079117\,i$.

146. $x = \sqrt[7]{2} = 1{,}104089$; $0{,}6883885 \pm 0{,}8632118\,i$;
$-0{,}2456830 \pm 1{,}076408\,i$;
$-0{,}9947505 \pm 0{,}4790464\,i$.

147. $\sqrt[m]{a \pm bi} = \sqrt[m]{\varrho} . \left(\cos\frac{z + 2n\pi}{m} \pm i . \sin\frac{z + 2n\pi}{m}\right)$,

$\varrho = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tang} z = \frac{b}{a}$; $\sqrt[3]{5 + 7 . i} = ?$

148. Die $2n$ Wurzeln der Gleichung $x^{2n} + px^n + q = 0$ zu bestimmen.

B. Ebene Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 11. Die Fundamental-Aufgaben.

a) Aus den Katheten a, b eines rechtwinkeligen Dreiecks die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

1. $a = 525{,}1$; $b = 785{,}3$.

Ausrechnung:

$\log a = 2{,}7202420$	$\log a = 2{,}7202420$	$\log(ab) = 5{,}6152776$
$\log b = 2{,}8950356$	$\log \sin\alpha = 9{,}7449559$	$0{,}3010300$
$\log \operatorname{tg}\alpha = 9{,}8252064$	$\log c = 2{,}9752861$	$\log F = 5{,}3142476$
$\alpha = 33^0\,46'\,8'',87$	$c = 944{,}6830$	$F = 206180{,}5$
$\beta = 56.\,13.\,51{,}13$		

$2 \log a = 5{,}4404840$; $a^2 = 275730{,}0$; $c^2 = 892426{,}1$
$2 \log b = 5{,}7900712$; $b^2 = 616696{,}1$; $\log c^2 = 5{,}9505722$
$\log c = 2{,}9752861$. Probe.

2. $a = 244$, $b = 151$.

Ausrechnung:		Probe:
$\log a = 2{,}38739$		4,77478
$\log b = 2{,}17898$		4,35796
$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}20841$	$\alpha = 58^0\,14'\,54''$	$a^2 = 59536$
$\log \sin \alpha = 9{,}92959$	$\beta = 31.\ 45.\ 6$	$b^2 = 22801$
$\log c = 2{,}45780$	$c = 286{,}95$	82337
$\log (ab) = 4{,}56637$		4,91560
0,30103		2,45780
$\log F = 4{,}26534$	$F = 18422$	$= \log c$.

3. $a = 0{,}849$, $b = 0{,}920$.

$a = 0{,}849$	0,92891—1	0,85782—1
$b = 0{,}920$	0,96379—1	0,92758—1
$\alpha = 42^0\ 42'\ 5''$	9,96512	0,72081
$\beta = 47.\ 17.\ 15$	9,83134	0,84640
$c = 1{,}2519$	0,09757	1,56721
	0,89270	0,19513
	0,30103	0,09757
$F = 0{,}39055$	0,59167	

	Aufgabe.		Resultate.			
	a	b	α	β	c	F
4.	94,638	536,72	10⁰ 0′	80⁰ 0′	545	25397
5.	137,07	307,86	24. 0	66. 0	337	21099
6.	2060,3	2288,1	42. 0	48. 0	3079	2357086
7.	38,313	19,522	63. 0	27. 0	43	373,97
8.	364,57	83,496	77. 6	12. 54	374	15220
9.	1,2291	14,950	4. 42	85. 18	15	9,187100
10.	1,4263	9,8978	8. 12	81. 48	10	7,0585
11.	6,3406	18,968	18. 29	71. 31	20	60,135
12.	16,156	25,278	32. 35	57. 25	30	204,20
13.	204,22	219,76	42. 54	47. 6	300	22440
14.	4199,7	2713,4	57. 8	32. 52	5000	5697800
15.	415,38	62,080	81. 30	8. 30	420	12894
16.	463,39	38,641	85. 14	4. 46	465	8952,9
17.	206,14	454,43	24. 24	65. 36	499	46838
18.	0,089076	0,12928	34. 34	55. 26	0,157	0,0057581
19.	0,104683	0,114308	42. 29	47. 31	0,155	0,0059831
20.	13,690	16,926	38. 58	51. 2	21,77	115,87
21.	2,0054	1,2874	57. 18	32. 42	2,383	1,2909
22.	0,30108	0,65360	24. 44	65. 16	0,71962	0,098639
23.	10,3426	888,84	0. 40	89. 20	888,9	4596,5

b) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Hypotenuse c und einer der Katheten zu berechnen.

24. $c = 5850$; $a = 4754$.

$\log a$	$= 3,6770592$	$\log c$	$= 3,7671559$
$\log c$	$= 3,7671559$	$\log \cos \alpha$	$= 9,7654843$
$\log \sin \alpha$	$= 9,9099033$	$\log b$	$= 3,5326402$
α	$= 54^0\, 21'\, 20'',20$	b	$= 3409,104$
β	$= 35.\ 38.\ 39,80$		

$\log a$	$= 3,6770592$	$c - a =$	1096
$\log b$	$= 3,5326402$	$c + a =$	10604
	$7,2096994$		$3,0398106$
	$0,3010300$		$4,0254697$
$\log F$	$= 6,9086694$		$7,0652803$
F	$= 8103440$		$3,5326402$
		$= \log b.$	Probe.

25. $c = 363$, $b = 217$.

$\log b$	$= 2,33646$		$c - b = 146$
$\log c$	$= 2,55991$		$c + b = 580$
$\log \cos \alpha$	$= 9,77655$;	$\alpha = 53^0\ 17'\ 18''$	$2,16435$
$\log \sin \alpha$	$= 9,90399$	$\beta = 36.\ 42.\ 42$	$2,76343$
$\log a$	$= 2,46390$	$a = 291,01$	$4,92778$
$\log (ab)$	$= 4,80036$		$2,46389$
$\log F$	$= 4,49933$	$F = 31574$	$= \log a.$

26.

$c = 9,994$	$0,75982$	$4,242$
$a = 5,752$	$0,99974$	$15,746$
$\alpha = 35^0\ \ 8'\ 17''$	$9,76008$	$0,62757$
$\beta = 54.\ 51.\ 43.$	$9,91263$	$1,19717$
$b = 8,1728$	$0,91237$	$0,91237$
	$1,67219$	
$F = 23,505$	$1,37116$	

	Aufgabe.		Resultate.			
	c	a	α	β	b	F
27.	2194	1758	53° 15′ 7″	36° 44′ 53″	1312,7	1153840
28.	30,69	24,67	53. 29. 53	36. 30. 7	18,256	225,19
29.	3,79	3,38	63. 6. 10	26. 53. 50	1,7146	2,8977
30.	65,555	40,845	38. 32. 23	51. 27. 37	51,276	1047,2
31.	7,2005	4,3809	37. 28. 30	52. 31. 30	5,7144	12,517
32.	8590	4476	31. 24. 15	58. 35. 45	7331,7	16408100
33.	92,9	63,8	43. 22. 26	46. 37. 34	67,529	2154,15
34.	78	71	65. 32. 30	24. 27. 30	32,294	1146,45
35.	210,111	80,782	22. 36. 38	67. 23. 22	193,96	7834,3
36.	1,70452	0,87807	31. 0. 26	58. 59. 34	1,4610	0,64141
37.	214,2590	96,8412	26. 52. 14	63. 7. 46	191,13	9254,4
38.	86,53	71,78	56. 3. 0	33. 57. 0	48,324	1734,36
39.	93,4	50,7	32. 52. 35	57. 7. 25	78,442	1988,5
40.	8,757	6,979	52. 50. 24	37. 9. 36	5,2897	18,458
41.	205	135	41. 11. 17	48. 48. 43	154,27	10413
42.	1734	792	27. 10. 35	62. 49. 25	1542,55	610857
43.	8651	869	5. 45. 54	84. 14. 6	8607,4	3739910
44.	9,35	8,49	65. 14. 0	24. 46. 0	3,917	16,628
45.	91,92	2,19	1. 21. 54,75	88. 38. 5,25	91,894	100,62
46.	50,5	17,4	20. 9. 17	69. 50. 43	47,407	412,44

Anmerkung: Sind c und a nur wenig von einander verschieden, so wird der Winkel α sehr gross und seine Bestimmung durch den Sinus wird ungenau. In diesem Falle bedient man sich deshalb besser der Formel $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$. Da hier zur Berechnung von β dieselben Logarithmen gebraucht werden, wie zur Berechnung von b, so ist dieses Verfahren auch dann bequem, wenn α nicht nahe an 90° ist, und der mittelbaren Berechnung von α durch den berechneten Werth von b und $\operatorname{tang} \alpha = a : b$ vorzuziehen.

47. $c = 50$; $a = 49$; $\beta = 11^0\, 28'\, 42''$.

48. $c = 12$; $b = 11$; $\alpha = 23^0\, 33'\, 24''$.

c) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Hypotenuse c und einem spitzen Winkel zu berechnen.

49. $c = 0{,}665008$, $\alpha = 6^0\, 17'\, 15''$, also $\beta = 83^0\, 42'\, 45''$.

$\log \sin \alpha = 9{,}0394831$	} +	$\log a$	$= 0{,}8623099-2$
$\log c = 0{,}8228268-1$		$\log b$	$= 0{,}8202066-1$
$\log \cos \alpha = 9{,}9973798$	} +	$\log (ab)$	$= 0{,}6825165-2$
			$0{,}3010300$
$a = 0{,}0728299$		$\log F$	$= 0{,}3814865-2$
$b = 0{,}6610078$		F	$= 0{,}02407058$

$$2 \log a = 0{,}7246198-3$$
$$2 \log b = 0{,}6404132-1$$
$$a^2 = 0{,}0053042$$
$$b^2 = 0{,}4369313$$
$$0{,}4422355$$
$$\log c^2 = 0{,}6456536-1$$
Probe: $\log c = 0{,}8228268-1.$

50. $c = 90{,}844,\ \beta = 59^0\ 29'\ 30'',\ \alpha = 30^0\ 30'\ 30''.$

$\log \sin \alpha = 9{,}70558$		$2 \log a = 3{,}32776$
$\log c = 1{,}95830$		$2 \log b = 3{,}78716$
$\log \cos \alpha = 9{,}93528$		$a^2 = 2126{,}48$
$\log a = 1{,}66388$;	$a = 46{,}119$	$b^2 = 6125{,}71$
$\log b = 1{,}89358$;	$b = 78{,}267$	$c^2 = 8252{,}19$
$\log (ab) = 3{,}55746$		$3{,}91657$
$\log F = 3{,}25643$;	$F = 1804{,}8$	$1{,}95829$
		Probe.

51.

$c = 798{,}10$	9,87977	5,56366
$\alpha = 49^0\ 18'\ 15''$	2,90206	5,43266
$\beta = 40.\ 41.\ 45.$	9,81427	366150
$a = 605{,}10$	2,78183	270806
$b = 520{,}39$	2,71633	636956
	5,49816	5,80412
$F = 157446$	5,19713	2,90206
		Probe.

52. $F = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha.$

$c = 798{,}10$	$\log \frac{1}{2} c = 2{,}60103$
$\alpha = 49^0\ 18'\ 15''$	$5{,}20206$
$\frac{1}{2} c = 399{,}05$	$\log \sin 2\alpha = 9{,}99508$
$2\alpha = 98.\ 36.\ 30$	$\log F = 5{,}19714$
	$F = 157450$

53.

$c = 412$	2,31387
$\alpha = 33^0\ 4'$	4,62774
206	9,96118
$66^0\ 8'$	4,58892
	$F = 38808,2.$

Aufgabe.			Resultat.			
	c	α	β	a	b	F
54.	2280	28⁰ 5′ 0″	61⁰ 55′ 0″	1073,3	2011,6	1079530
55.	7,65013	10. 2. 15	79. 57. 45	1,3334	7,5330	5,0221
56.	62,7341	59. 12. 5,7	30. 47. 54,3	53,887	32,121	865,45
57.	525,01	86. 10. 12,5	3. 49. 47,5	523,83	35,067	9184,5
58.	627	23. 30. 0	66. 30. 0	250,02	575,00	71880
59.	857	32. 40. 15	57. 19. 45	462,61	721,40	166873
60.	72,15	39. 34. 30	50. 25. 30	45,967	55,613	1278,2
61.	57,54	44. 54. 50	45. 5. 10	40,625	40,748	827,62
62.	3,6435	50. 0. 12	39. 59. 48	2,7912	2,3418	3,2683
63.	2,2474	53. 3. 19	36. 56. 41	1,7961	1,3508	1,2131
64.	155,44	59. 45. 20	30. 14. 40	134,28	78,29	5256,6
65.	797,92	66. 36. 24	23. 23. 36	732,33	316,8	116003
66.	9,999	6. 56. 30	83. 3. 30	1,2085	9,9258	0,59975
67.	7	0. 30. 12	89. 29. 48	0,0615	6,9997	0,21522
68.	571	27. 27. 27	62. 32. 33	263,29	506,69	66701,7
69.	64	25. 35. 30	64. 24. 30	27,645	57,721	797,87
70.	1	36.	54.	0,58779	0,80902	0,23777
71.	200	68. 12. 57	21. 47. 3	185,72	74,217	6734,9
72.	93,4	13. 34. 59	76. 25. 1	21,9355	90,7880	995,75
73.	600	0. 0. 13	89. 59. 47	0,03781	600 — ?	11,344

d) Ein rechtwinkeliges Dreieck aus einer Kathete und einem spitzen Winkel zu berechnen.

74. $a = 76,5183$, $\alpha = 24^0\ 5'\ 12'',11$, $\beta = 65^0\ 54'\ 47'',89$.

$\log \operatorname{cotg} \alpha = 10,3496507$	$\log (ab) = 4,1171813$
$\log a = 1,8837653$	$\log F = 3,8161513$
$\log \sin \alpha = 9,6107863$	$F = 6548,643$
$\log b = 2,2334160$	$b = 171,1654$
$\log c = 2,2729790$	$c = 187,4904$

$2 \log c = 4{,}5459580$
$2 \log b = 4{,}4668320$
$c^2 = 35152{,}65$
$b^2 = 29297{,}60$
$a^2 = 5855{,}05$
$\log a^2 = 3{,}7675306$
Probe: 1,8837653.

75. $a = 982$

$\beta = 26^0\ 38'\ 15''$	$\log \operatorname{cotg} \alpha = 9{,}70034$
$\alpha = 63.\ 21.\ 45.$	$\log a = 2{,}99211$
$b = 492{,}55$	$\log \sin \alpha = 9{,}95127$
$c = 1098{,}60$	$\log b = 2{,}69245$
	$\log c = 3{,}04084$
$F = 241839$	$\log (ab) = 5{,}68456$
	$\log F = 5{,}38353$
	$2 \log c = 6{,}08168$
	$2 \log b = 5{,}38490$
	$c^2 = 1206920$
	$b^2 = 242606$
	$a^2 = 964314$
	$\log a^2 = 5{,}98422$
	Probe: $\log a = 2{,}99211.$

76.

$b = 0{,}77014$	9,88769
$\alpha = 37^0\ 40'\ 22''$	9,88657
$\beta = 52.\ 19.\ 38.$	0,89846
$a = 0{,}59465$	9,77426
$c = 0{,}97300$	9,98811
	9,66083
$F = 0{,}22898$	9,35980
	9,97622
	9,54852
	0,94672
	0,35361
	0,59311
	9,77314
	Probe: 9,88657.

	Aufgabe.		Resultat.			
	a	α	β	b	c	F
77.	2,894	38°21′30″	51° 38′30″	3,6568	4,6633	5,2913
78.	18,003	47. 0. 0	43. 0. 0	16,788	24,616	151,117
79.	21,927	51. 15. 3	38. 44. 57	17,598	28,115	192,935
80.	78,555	59. 45. 11	30. 14. 49	45,807	90,937	1799,2
81.	637	4. 35. 0	85. 25. 0	7946,0	7971,5	2530820
82.	992	13. 41. 0	76. 19. 0	4074,45	4193,55	2020910
83.	73	21. 8. 12	68. 51. 48	188,82	202,44	6891,9
84.	57	26. 40. 40	63. 19. 20	113,44	126,96	3233
85.	2,189	44. 35. 14	45. 24. 46	2,2208	3,1183	2,4307
86.	48,532	36. 44. 11	53. 15. 49	65,025	81,138	1577,9
87.	0,2831	44. 44. 44	45. 15. 16	0,28563	0,40215	0,040431
88.	0,1705	54. 15. 21	35. 44. 39	0,12273	0,21007	0,010463
89.	0,2364	60. 19. 22	29. 40. 38	0,13472	0,27209	0,015924
90.	0,0795	69. 32. 18	20. 27. 42	0,029663	0,084854	0,0011791
91.	0,0935	75. 24. 4	14. 35. 56	0,024353	0,096620	0,0011385
92.	0,0008	86. 0. 0	4. 0. 0	0,0000559	0,000802..	0,000000022376
93.	50,937	43. 48. 1	46. 11. 59	53,116	73,592	1352,8
94.	2	3. 38. 0	86. 22. 0	31,496	31,560	31,496
95.	3	23. 49. 30	66. 10. 30	6,7939	7,4268	10,191
96.	4	52. 4. 2	37. 55. 58	3,1176	5,0714	6,2351

§. 12. Gleichschenkelige Dreiecke.

a) Die Winkel, die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks aus der Basis b und einem Schenkel a zu berechnen.

1. $a = 14,3$; $b = 11$. $\alpha = 67^0\ 22'\ 48'',5$;
$\beta = 45^0\ 14'\ 23'',0$; $h = 13,2$; $F = 72,6$.

2. $a = 3,4$; $b = 6$; $\alpha = 28^0\ 4'\ 20'',9$;
$\beta = 123^0\ 51'\ 18'',2$; $h = 1,6$; $F = 4,8$.

3. $a = 5$; $b = 2,8$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23'',3$;
$\beta = 32^0\ 31'\ 13'',4$; $h = 4,8$; $F = 6,72$.

b) Aus dem Schenkel a und dem Winkel β an der Spitze oder einem Basiswinkel α die übrigen Stücke eines gleichschenkeligen Dreiecks zu berechnen.

4. $a = 835$; $\beta = 154^0\ 59'\ 22''$; $\alpha = 12^0\ 30'\ 19''$;
$b = 1630,4$; $h = 180,804$; $F = 147390$.

5. $a = 7{,}71$; $\beta = 110^0\ 48'\ 48''$; $\alpha = 34^0\ 35'\ 36''$;
$b = 12{,}6938$; $h = 4{,}3773$; $F = 27{,}7825$.

6. $a = 0{,}295$; $\alpha = 68^0\ 10'\ 9''$; $\beta = 43^0\ 39'\ 42''$;
$b = 0{,}21940$; $h = 0{,}27384$; $F = 0{,}0300407$.

c) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Basis b und einem Basiswinkel α (oder dem Winkel β an der Spitze) zu berechnen.

7. $b = 5{,}6840$; $\alpha = 48^0\ 12'\ 10''$; $\beta = 83^0\ 35'\ 40''$;
$a = 4{,}264$; $h = 3{,}1789$; $F = 9{,}0342$.

8. $b = 4{,}5656$; $\alpha = 51^0\ 14'\ 12''$; $\beta = 77^0\ 31'\ 36''$;
$a = 3{,}646$; $h = 2{,}8429$; $F = 6{,}49$.

9. $b = 2{,}3512$; $\beta = 69^0\ 49'\ 26''$; $\alpha = 55^0\ 5'\ 17''$;
$a = 2{,}0541$; $h = 1{,}6844$; $F = 1{,}9803$.

d) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Grundlinie b und der Höhe h zu berechnen.

10. $b = 147$; $h = 70$; $\alpha = 43^0\ 36'\ 10'',1$;
$\beta = 92^0\ 47'\ 39'',8$; $a = 101\frac{1}{2}$; $F = 2572\frac{1}{2}$.

11. $b = 9$; $h = 20$; $\alpha = 77^0\ 19'\ 10'',6$;
$\beta = 25^0\ 21'\ 38'',8$; $a = 20\frac{1}{2}$; $F = 45$.

12. $b = 63$; $h = 10{,}8$; $\alpha = 18^0\ 55'\ 28'',7$.
$\beta = 142^0\ 9'\ 2'',6$; $a = 33{,}3$; $F = 170{,}1$.

e) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Höhe h und dem Schenkel a zu berechnen.

13. $h = 6{,}6$; $a = 6{,}71$; $\alpha = 79^0\ 36'\ 40'',0$;
$\beta = 20^0\ 46'\ 40'',0$; $b = 2{,}42$; $F = 7{,}986$.

14. $h = 4{,}2$; $a = 7{,}95$; $\alpha = 31^0\ 53'\ 26'',8$;
$\beta = 116^0\ 13'\ 6'',4$; $b = 13{,}5$; $F = 28{,}350$.

15. $h = 196$; $a = 227{,}5$; $\alpha = 2^0\ 599'\ 23'',2$;
$\beta = 61^0\ 1'\ 13'',6$; $b = 231$; $F = 22638$.

f) Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Höhe h und dem Winkel β an der Spitze (oder dem Basiswinkel α) zu berechnen.

16. $h = 3{,}1893$; $\beta = 63^0\ 41'\ 18''$; $\alpha = 58^0\ 9'\ 21''$;
$a = 3{,}7543$; $b = 3{,}9616$; $F = 6{,}3173$.

17. $h = 7{,}4847$; $\alpha = 76^0\ 14'\ 21''$; $\beta = 27^0\ 31'\ 18''$;
$a = 7{,}7058$; $b = 1{,}8330$; $F = 13{,}719$.

18. $h = 16{,}8$; $\alpha = 81^0\ 12'\ 9'',3$; $\beta = 17^0\ 35'\ 41'',4$;
$a = 17$; $b = 2{,}6$; $F = 43{,}68$.

§. 13. Der Kreis.

1. Wie gross ist in einem Kreise mit dem Radius 1 die zu dem Centriwinkel α gehörige Sehne? a) $\alpha = 43^0\ 2'$; b) $\alpha = 75^0\ 10'\ 24''$; c) $\alpha = 124^0\ 18'\ 34''$.

2. Wie gross ist in einem Kreise mit dem Radius r die zu dem Centriwinkel α gehörige Sehne? a) $\alpha = 27^0\ 42'\ 35'',2$; $r = 4{,}176$; b) $\alpha = 168^0\ 5'\ 59''$; $r = 14{,}47$; c) $\alpha = 134^0\ 20'\ 24''$; $r = 2{,}17$.

3. Eine Sehne im Kreise mit dem Radius 1 sei gleich s gegeben; man berechne den zugehörigen Centriwinkel. a) $s = 0{,}74922$; b) $s = 1{,}76588$.

4. Den zu einer gegebenen Sehne s in einem Kreise von gegebenem Radius r gehörigen Centriwinkel zu berechnen. $s = 8{,}4458$; $r = 7{,}651$.

5. In einem Kreise schneiden sich zwei Durchmesser unter dem spitzen Winkel γ. Verbindet man ihre Endpunkte, so ist die eine Verbindungssehne um d^m grösser als die andere. Wie gross ist der Durchmesser des Kreises und wie gross sind die Sehnen?

6. Wie verhält sich in einem Kreise die Sehne, welche halb so gross wie der Radius ist, zu der Länge des zugehörigen kleineren Bogens?

7. Wie gross ist der Centriwinkel eines Kreises, dessen Sehne gleich $\frac{4}{3}$ des Radius ist?

8. Wie verhält sich diejenige Sehne, deren Bogen dem Radius gleich ist, zum Radius?

9. In einem Kreise mit dem Radius r ist eine Sehne gleich s gegeben; man soll die Länge des zu ihr gehörigen kleineren Bogens berechnen. $s = 9{,}8$; $r = 9{,}904$.

10. Wie gross ist der Radius eines Kreises, in welchem die Sehne s den Peripheriewinkel α hat? $s = 6{,}9892$; $\alpha = 34^0$.

11. Die Sehne eines jeden Bogens an der Donaubrücke in Ulm ist gleich 60 Fuss, seine Höhe gleich 10 Fuss; wie lang ist der Bogen?

12. Den Flächeninhalt eines Kreissegments zu berechnen, wenn der Radius r und die zugehörige Sehne s gegeben sind. $r = 11{,}284$; $s = 6{,}9738$. (Zwei Auflösungen.)

13. Ebenso **a)** aus r und dem Abstand p der Sehne vom Mittelpunkt, **b)** aus r und dem zugehörigen Centriwinkel $\alpha . r = 37$, $\alpha = 29^0\ 38'\ 15''$; **c)** aus r und der Länge b des zugehörigen Bogens.

14. In einen Kreis, dessen Radius gleich r ist, sind von demselben Punkte der Peripherie aus zwei Sehnen gezogen, welche bezüglich die Längen a und b haben. Wie gross ist der Winkel, den diese Sehnen mit einander bilden? Insbesondere sei **a)** $a = b = r$; **b)** $a = 2{,}868$; $b = 7{,}0985$; $r = 5$. (Zwei Fälle.)

15. In einem Kreise, dessen Radius gleich r ist, gehen von einem Punkte der Peripherie aus zwei Sehnen, deren Längen bezüglich gleich a und b sind. Wie gross ist der von ihnen eingeschlossene Bogen in Längenmass, und wie gross ist der zwischen ihnen liegende Theil des Kreises? (Zwei Fälle.) $r = 1{,}41472$; $a = 2{,}76756$; $b = 1{,}01398$.

16. In einem Kreise, dessen Radius gleich r ist, sind zwei einander parallele Sehnen bezüglich gleich a und b gegeben. Man berechne **a)** die Grösse jedes der zwischen ihnen liegenden Bogen, **b)** den Flächeninhalt des zwischen ihnen liegenden Theiles des Kreises. $r = 57{,}2958$; $a = 105{,}483$; $b = 111{,}654$.

17. In welchem Verhältniss muss ein Radius eines Kreises durch eine zu ihm senkrechte Sehne getheilt werden, damit letztere die Peripherie des Kreises im Verhältniss $m : n$ theile? $m : n = 3 : 1$.

18. Eine Sehne eines Kreises, dessen Peripherie gleich P gegeben ist, theile diese Peripherie im Verhältniss $m : n$. Man berechne den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt $m : n = 2 : 3$; $P = 310{,}657$.

19. Die Peripherie eines Kreises ist in ihre 360 Grade getheilt, und von einem der Theilpunkte sind nach allen übrigen Sehnen gezogen. Man soll die Summe dieser Sehnen durch eine möglichst einfache goniometrische Formel ausdrücken und hieraus für den Radius 1 **a)** den Winkel bestimmen, dessen Tangente halb so gross, sowie **b)** den Winkel, dessen Tangente gerade so gross als diese Summe ist.

20. Die Aufgabe, aus der Sehne s eines Bogens im Kreise mit dem Radius r die Sehne des halben Bogens zu berechnen,

soll auf trigonometrischem Wege gelöst, und sodann soll die Uebereinstimmung der gefundenen Formel mit der für dieselbe Aufgabe in der Planimetrie abgeleiteten nachgewiesen werden.

§. 14. Regelmässige Polygone.

1. Wie gross ist die Seite des einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmässigen Vierzehn-Ecks? $r = 17,976$.

2. Man berechne die Seite eines regelmässigen Siebenecks aus seinem Flächeninhalt F. $F = 43,253$.

3. Einem Kreise ist ein regelmässiges Neuneck von a Quadratmeter Inhalt einbeschrieben; welche Länge hat der Radius des Kreises? $a = 289\frac{1}{4}$.

4. Wieviel beträgt der Flächeninhalt eines regelmässigen Achtzehnecks, dessen Umfang gleich u Decimeter ist? $u = 102,96$.

5. Der Flächeninhalt des einem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Fünfecks sei gleich a Quadratcentimeter. Wie gross ist ein demselben Kreise einbeschriebenes regelmässiges Elfeck? $a = 3,3184$.

6. Ein regelmässiges Neuneck habe mit einem regelmässigen Zehneck gleichen Umfang. Wie verhalten sich die Flächenräume der beiden Figuren zu einander?

7. Ein regelmässiges Elfeck habe mit einem regelmässigen Zwanzigeck gleichen Umfang; der Inhalt des ersteren sei um a Quadratmeter kleiner als der des letzteren. Wie lang sind die Seiten der beiden Polygone? $a = 294,56$.

8. Berechne den Inhalt eines regelmässigen Achtzehnecks aus dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises. $\varrho = 4,9127$.

9. In und um einen Kreis sind zwei regelmässige Siebenundzwanzigecke so beschrieben, dass ihre Seiten paarweise parallel sind. Man soll den Flächeninhalt der zwischen ihren Umfängen liegenden Figur aus dem Radius r des Kreises berechnen. $r = 3,06668$.

10. Wie verhält sich der Inhalt eines regelmässigen Siebenzehnecks, dessen Seite gleich a ist, zum Inhalt eines regelmässigen Neunzehnecks, dessen Seite gleich b ist? $a = 15,0904$; $b = 16,5173$.

§. 15. Anwendungen des rechtwinkeligen und des gleichschenkeligen Dreiecks.

a. Aufgaben aus der Planimetrie.

1. Die Seiten und den Inhalt eines Rechtecks aus der Diagonale d und dem Winkel α, welchen dieselbe mit einer Seite bildet, zu berechnen. $d = 325$, $\alpha = 25^0\ 42'$.

2. Aus den Seiten a und b eines Rechtecks die Winkel zu berechnen, welche dieselben mit einer Diagonale bilden. $a = 4937$; $b = 3874$.

3. Die Winkel eines Rhombus aus den Diagonalen desselben zu berechnen. $d = 0{,}52293$; $d_1 = 5{,}97714$.

4. Von einem Parallelogramm sei eine Seite, ein Winkel und der Flächeninhalt gegeben; man berechne die andere Seite. $a = 13{,}5$; $\alpha = 36^0\ 36'\ 10''$. $F = 668{,}11\square$.

5. Die Halbirungspunkte der Seiten eines Rechtecks bilden die Eckpunkte eines Rhombus. Man berechne die Winkel des letzteren aus den Seiten a, b des ersteren. $a = 1{,}3782$; $b = 4{,}8063$.

6. Berechne den Winkel, welchen zwei Tangenten eines Kreises mit einander bilden, aus der Entfernung a ihres Durchschnittspunktes vom Mittelpunkt und dem Radius r. $r = 1{,}67$; $a = 4{,}66$.

7. Welchen Winkel bilden die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise mit einander, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren Centrallinie gleich d ist? (Discussion des Resultats!) $R = 6{,}130$; $r = 2{,}014$; $d = 8{,}49$.

8. In welchem Verhältniss wird die Fläche eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks durch die Halbirungslinie eines der spitzen Winkel getheilt?

9. Ein rechtwinkeliges Dreieck soll durch eine von einem Endpunkte der Hypotenuse ausgehende Gerade halbirt werden. In welchem Verhältniss theilt die Halbirungslinie den zugehörigen spitzen Winkel, wenn dieser gleich 60^0 ist?

10. Auf einer Strecke $AB = a$ sei in A eine Senkrechte errichtet, und auf dieser sei $AC = CD = DE = b$ abgetragen;

wie verhalten sich die Winkel CBA, DBC, EBD zu einander, a) allgemein, b) für $b = a$?

11. Von einem Rechteck ist eine Diagonale und ein von den Diagonalen gebildeter Winkel gegeben. Man berechne seinen Flächeninhalt. $d = 21,633$; $\alpha = 33^0\ 41'\ 24'',4$.

12. Das Quadrat der Länge eines Rechtecks sei gleich dem doppelten Quadrat seiner Breite; unter welchem Winkel schneiden sich seine Diagonalen?

13. In einem gleichschenkeligen Dreieck verhält sich das Quadrat des Schenkels zum Quadrat der Grundlinie wie $m : n$. Wie gross ist der Winkel an der Spitze? $m : n = 650 : 813$.

14. Wie verhält sich der Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks zu seiner Basis, wenn der Winkel an der Spitze gleich β ist? $\beta = 8^0\ 11'\ 31'',5$.

15. Der Querschnitt eines Daches bildet ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Höhe $7^m,08$ und dessen Winkel an der Grundlinie $65^0\ 15'\ 37''$ beträgt. Wie gross ist die Grundfläche des Daches, wenn seine Länge das $3\frac{1}{2}$fache der Breite beträgt?

16. Von einem gleichschenkeligen Trapez sei der Flächeninhalt F nebst den beiden parallelen Seiten gegeben; man berechne seine Winkel. $F = 3,47715$; $a = 5$; $b = 3$.

17. Von einem Trapez seien die kleinere parallele Seite a, eine nicht parallele Seite c und die spitzen Winkel α, β (α an c anliegend) gegeben. Man berechne die beiden anderen Seiten. $a = 12$; $c = 15$; $\alpha = 59^0\ 29'\ 20'',1$; $\beta = 67^0\ 22'\ 48'',5$.

18. Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes sind $a = 3,51$ und $b = 7,04$ Meter lang, und ihre Verlängerungen stossen unter einem rechten Winkel zusammen. Wie gross sind die Winkel des Trapezes?

19. In einem gleichschenkeligen Dreieck sei ein Schenkel gleich a und der Winkel an der Spitze gleich β gegeben. Zu der Grundlinie sei eine parallele Transversale gezogen, welche gleich der Summe der unteren Abschnitte der Schenkel ist. Wie lang ist diese Parallele? $a = 40,281$; $\beta = 27^0\ 20'$.

20. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren gemeinschaftliche Sehne gleich a ist? $R = 527,39$; $r = 474,27$; $a = 422,00$.

21. Für zwei sich rechtwinkelig schneidende Kreise sei die gemeinschaftliche Sehne gleich s und die Centrallinie gleich c gegeben; man soll den Inhalt des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstücks berechnen. $c = s$.

22. Auf einer Geraden $AB = a$ stehen in ihren Endpunkten zwei Perpendikel $AC = b$, $BD = c$. In welcher Entfernung von A liegt auf AB der Punkt E, für welchen, wenn man ihn mit C und D verbindet, $\sphericalangle BED = 2 . AEC$ ist? $a = 60$; $b = 61$; $c = 11$.

23. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und der grösseren Kathete gleich der Differenz zwischen beiden Katheten; wie gross sind die Winkel?

24. Auf einer Seite eines Quadrats ist ein Punkt gegeben, welcher diese Seite im Verhältniss $m : n$ theilt. In das Quadrat ist ein zweites Quadrat so einbeschrieben, dass seine Eckpunkte auf dem Umfang des ersteren liegen, und zwar einer von ihnen auf dem gegebenen Punkt. Welche Winkel bilden die Diagonalen des neuen Quadrats mit den Seiten des alten? $m:n = 603:965$.

25. Mittelst trigonometrischer Rechnung den Satz zu beweisen, dass die Summe der von einem Punkte auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Schenkel gefällten Perpendikel gleich der auf einem Schenkel stehenden Höhe ist.

26. Von einem Punkte des einen Schenkels eines gegebenen Winkels α ist auf den anderen Schenkel eine Senkrechte, von dem Fusspunkt dieser Senkrechten eine zweite auf den ersten Schenkel, von dem Fusspunkt der zweiten eine dritte auf den zweiten Schenkel gefällt, u. s. f. Man berechne **a**) die Summe der unendlich vielen Perpendikel, wenn die Länge des ersten gleich a gegeben ist, **b**) die Summe aller auf den Schenkeln gebildeten Projectionen, wenn der Abstand b des ersten Punktes vom Scheitel gegeben ist. $\alpha = 50^0$; $a = 1,7411$; $b = 2,2729$.

27. Ein gegebener Winkel α, welcher an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks liegt, sei in drei gleiche Theile getheilt; man berechne das Verhältniss des mittleren von den auf der Basis gebildeten Abschnitten zu einem der äusseren. $\alpha = 120^0$.

b. Aufgaben aus der praktischen Geometrie, Astronomie und Geographie.

Höhen.

28. Die Spitze eines Thurmes erschien in einer horizontalen Entfernung von a Meter von dem Mittelpunkt seiner Grundfläche unter einem Höhenwinkel gleich α. Wie hoch war der Thurm? a) $a=291,993$; $\alpha=13^0\ 40'$; b) $a=86,63$; $\alpha=22^0\ 1'$; c) $a=28,722$; $\alpha=49^0 15'$.

29. Auf einem Berge steht eine Spitze, deren Länge gleich a^m bekannt ist. In einer horizontalen Entfernung gleich b^m erscheint der höchste Punkt derselben unter dem Elevationswinkel α. Man berechne daraus die Höhe des Berges. $a=1$; $b=100$; $\alpha=61^0\ 0'\ 46''$.

30. Um die Breite eines Flusses zu messen, nimmt man dem Ufer entlang eine Standlinie $AB=a$ an; die in A auf AB senkrecht stehende Visirlinie trifft das jenseitige Ufer in C, und es ist der Winkel $ABC=\beta$. Wie breit ist der Fluss? $a=42^m$; $\beta=25^0\ 27'\ 47''$.

31. Die Höhe eines Leuchtthurmes über der Meeresfläche beträgt a^m, der an seiner Spitze gemessene Depressionswinkel eines Schiffes betrug α^0. Man berechne die Entfernungen des Schiffes von dem Fusspunkt und von der Spitze des Thurmes. $a=27$; $\alpha=4^0\ 14'\ 31'',9$.

32. Gegeben sei die Höhe eines Thurmes gleich a^m, die eines Fenster eines Hauses über derselben Horizontalebene gleich b^m, der Elevationswinkel aus dem Fenster zur Spitze des Thurmes gleich φ. Man berechne die Entfernung des Thurmes vom Hause und die seiner Spitze vom Fenster. $a=30,3$; $b=10$; $\varphi=27^0\ 8'\ 27'',1$.

33. Der Gipfel eines Berges liegt a^m höher als der Fuss eines Thurmes, dessen Spitze von jenem aus in einer horizontalen Entfernung von b^m unter dem Depressionswinkel α erscheint. Wie hoch ist der Thurm? $a=90$; $b=399$; $\alpha=5^0\ 43'\ 29'',3$.

34. Der Gipfel einer senkrecht aus der Ebene hervorragenden Felswand erscheint in einer Entfernung von a^m unter einem Erhebungswinkel, welcher sich verdreifacht, wenn man b^m näher herangeht. Wie gross ist der Winkel und wie gross die Höhe der Felswand? $a=299$; $b=202$.

Schattenlänge.

35. Die Länge des horizontalen Schattens einer a^m hohen Säule betrug b^m; man berechne daraus die gleichzeitige Höhe der Sonne. $a = 15{,}2431$; $b = 47{,}62$.

36. Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Menschen a) der halben, b) der doppelten Länge desselben gleich ist?

37. Der Schatten einer verticalen Stange ist um $\frac{1}{n}$ der Länge der Stange kürzer als diese; welche Höhe hat die Sonne? $n = 10{,}0407$.

38. Wie lang ist der horizontale Schatten eines a^m hohen Gegenstandes, wenn die Sonne eine Höhe gleich α hat? a) $a=12$, $\alpha=23^0\ 30'$; b) $a=3{,}6$; $\alpha=30^0\ 15'$; c) $a=6{,}5$; $\alpha=51^0\ 40'$.

39. Wenn φ die geographische Breite eines Ortes auf der nördlichen Halbkugel der Erde, ε die Schiefe der Ekliptik ($23\frac{1}{2}{}^0$) bedeutet, so ist die Höhe der Sonne zur Zeit des wahren Mittags des längsten Tages gleich $90^0 - \varphi + \varepsilon$ und am Mittag des kürzesten Tages gleich $90^0 - \varphi - \varepsilon$. Einen wie langen Schatten wirft zu den angegebenen Zeiten ein 10 Meter hoher Gegenstand zu Berlin, dessen geographische Breite gleich $52^0\ 31'$ ist?

40. Die Länge des Schattens eines verticalen Stabes sei an einem Orte am Mittag der Tag- und Nachtgleiche gleich l, die Höhe des Stabes gleich h gemessen. Welches ist hiernach (abgesehen von der bei solchen Beobachtungen unvermeidlichen Ungenauigkeit) die geographische Breite des Ortes? $h = 1^m{,}58$; $l = 1^m{,}9995$.

41. a) Die von dem obersten und dem untersten Punkte eines leuchtenden Körpers über die Spitze einer vertikalen Stange, deren Länge gleich a ist, einfallenden Strahlen bilden mit der durch den Fusspunkt der Stange gehenden Horizontalebene die Neigungswinkel α und β. ($\alpha > \beta$.) Wie lang ist der Halbschatten der Stange? $a = 13{,}5$; $\alpha = 27^0\ 35'\ 0''$; $\beta = 18^0\ 40'\ 30''$.

b) Ueber die Spitze einer a^m hohen vertikalen Stange fallen die oberen Randstrahlen der Sonne, deren Sehwinkel $31'\ 1''{,}8$ beträgt, unter dem Winkel α gegen den Horizont ein; wie lang ist der Halbschatten der Stange auf dem Horizont? $a = 6{,}5076$; $\alpha = 26^0\ 31'\ 2''$.

Sehwinkel.

42. Unter welchem Sehwinkel erscheint eine Signalstange, deren Entfernung ihre Länge 3000 mal übertrifft?

43. Der Sehwinkel eines Körpers sei 35'. Wie viele Mal übertrifft seine Entfernung seine wahre Grösse?

44. Damit ein Gegenstand in der normalen Sehweite von 25^{cm} sichtbar sei, muss sein Sehwinkel mindestens 40'' betragen. Wie gross muss also der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes mindestens sein?

45. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein 72 Meter hoher Thurm in einer Entfernung von 570 Meter, wenn das Auge des Beobachters 3,5 Meter über dem Boden ist?

46. In welcher Entfernung würde eine 9 Meter breite Allee einem am Eingange in der Mitte desselben befindlichen Beobachter zusammenzulaufen scheinen, wenn man 40'' als Grenze des Sehwinkels annimmt?

Parallelkreise.

47. Aus dem Erddurchmesser gleich 1719 geogr. Meilen und der geographischen Breite φ eines Ortes den Umfang seines Parallelkreises zu berechnen. $\varphi = 44^0\ 50'\ 14''$.

48. Wie gross ist jeder Grad eines Parallelkreises der Erde unter der Breite φ, wenn der Umfang des Aequators 5400 Meilen beträgt? $\varphi = 51^0\ 41'$.

49. Unter welcher geographischen Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises der Erde u Meilen, wenn der Erdradius gleich 859,5 Meilen ist? $u = 2196{,}55$.

50. Wieviel Meter legt bei der Axendrehung der Erde ein Punkt unter $52^0\ 5'\ 7'',5$ geographischer Breite in jeder Secunde (Sternzeit) zurück? (1 geogr. Meile = 7420,16 Meter.)

Höhen über der Erdkugel.

51. Wie hoch wenigstens muss ein Berg sein, damit man seine Spitze noch in 21 Meilen Entfernung sehen kann? (Erdradius = 859,5 Meilen, 1^0 = 15 Meilen, 1 Meile = 7420,16 Meter.)

52. Wie weit erstreckt sich in ebener Gegend die Fernsicht eines $1\frac{3}{4}$ Meter grossen Menschen? (Anleitung: Setze die gesuchte Entfernung e gleich r mal dem Sinus des zugehörigen Centriwinkels mal 7420,16 Meter und berechne $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}$ aus dem für $\cos\alpha$ gefundenen Ausdruck, oder setze $e = 2r \sin\frac{1}{2}\alpha$, u. s. w.)

53. Wie weit steht von der Spitze eines a Meter hohen Thurmes der entfernteste von ihr sichtbare Punkt der Erde ab?

54. Wie gross ist die Fläche der Erde, welche man in einer Höhe von 73,1 Meter übersieht?

55. Auf dem Meere sieht man von einem Schiffe aus, wenn das Auge 10 Meter über die Meeresfläche erhaben ist, in einer Entfernung von circa 33 Meilen den Gipfel des Pik von Teneriffa am Horizont. Man soll die ungefähre Höhe des Berges berechnen. (Umfang der Erde = 5400 Meilen.)

56. a) Wie weit können sich zwei Männer, von denen jeder eine Grösse von $1^m,5$ hat, von einander entfernen, um sich bei der Krümmung der Erde noch sehen zu können?

b) Die Höhe eines Leuchtthurmlichtes über dem Niveau des Meeres ist 66^m; aus welcher Entfernung kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges über demselben Niveau $3^m,96$ ist? ($r = 859,4$ Meilen.)

57. Wie hoch muss der Punkt über der Meeresfläche liegen, von dem man in 50 Meilen Entfernung den Gipfel des 27212 P. F. hohen Mount Everest sehen kann? (1 Pariser Fuss = 0,324839 Meter.)

58. Auf dem Chimborazo misst der Winkel, den die Horizontallinie mit einer nach dem Rande des Horizonts gehenden Linie bildet, $2^0\,49'\,50'',39$. Welches ist die Höhe des Berges?

59. Wie weit müsste man sich von der Erde entfernen, um eine Fläche derselben so gross wie die kalte Zone übersehen zu können? (Schiefe der Ekliptik gleich $23\frac{1}{2}{}^0$.)

Grösse und Entfernung v. Gestirnen.

60. Wie gross ist der Durchmesser eines Gestirns, wenn seine scheinbare Grösse $x = 31'\,59'',4$ und seine Entfernung von der Erde $e = 20665840$ Meilen gegeben sind?

61. Die Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und der Erde (centrische Entfernung) sei gleich 24063,33 Erdhalbmessern; wie gross ist der scheinbare Sonnenhalbmesser an der Erdoberfläche, wenn derselbe am Mittelpunkt der Erde $16'\,0'',44$ beträgt?

62. Es sei die centrische Entfernung der Erde von der Sonne gleich 20682440 Meilen, der scheinbare Sonnenhalbmesser am Mittelpunkt der Erde gleich $16'\,0'',44$, der scheinbare Erdhalbmesser im Mittelpunkt der Sonne gleich $8'',58608$. Wie viele Mal ist der Sonnendurchmesser grösser als der Erddurchmesser? (Welche Angabe ist überflüssig?)

63. Die Horizontalparallaxe des Mondes sei zu $57'\,2'',066$, der Erddurchmesser zu 1719 Meilen angenommen; wie gross ist

die centrische Entfernung des Mondes von der Erde, und wie viele Meilen beträgt sein Halbmesser, wenn dessen scheinbare Grösse am Erdmittelpunkt sich zu jener Parallaxe wie 0,2725 : 1 verhält?

64. Die centrische Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 60,27781 Erdhalbmesser und verhält sich zur centrischen Entfernung der Sonne von der Erde wie 1 : 399,20715. Wie viele Mal ist die Horizontalparallaxe des Mondes grösser als die der Sonne?

Best. der Schiefe der Ekliptik.

65. Im Jahre 1100 vor Christus wurde an einem 8 Fuss hohen Gnomon die kleinste Schattenlänge desselben im Sommersolstitium gleich 1,54, im Wintersolstitium gleich 13,12 Fuss beobachtet. Man soll die damalige Schiefe der Ekliptik bestimmen.

66. Der Grieche Pytheas beobachtete im Jahr 320 v. Chr. in Marseille zur Zeit des Sommersolstitiums die Sonne an einem Gnomon, dessen Höhe 120′ und dessen mittägige Schattenlänge $41\frac{4}{5}'$ betrug. Welcher Werth folgt hieraus für die damalige Schiefe der Ekliptik, wenn die Polhöhe von Marseille $43^0\ 18'$ und der Halbmesser der Sonne gleich $0^0\ 16'$ ist? (Letzterer ist von der berechneten Höhe der Sonne abzuziehen.)

Vermischte Aufgaben.

67. Unter welcher geogr. Breite liegt derjenige nördliche Parallelkreis der Erde, dessen Ebene die Erdaxe im Verhältniss 4 : 5 theilt?

68. Zwei Orte liegen auf dem φten Grade nördlicher Breite und haben eine östliche geogr. Länge von bezüglich a^0 und b^0. Wie weit sind dieselben von einander entfernt? $\varphi = 36^0$; $a = 130^0\ 20'\ 3'',3$; $b = 131^0\ 58'\ 56'',0$.

69. Der Abstand zweier über einander befindlichen Fensterbänke eines Hauses ist gleich a^m, und die aus ihnen zu einem Punkte des Erdbodens gemessenen Depressionswinkel sind bezüglich gleich α und β. Wie weit ist jener Punkt vom Hause entfernt? $a = 4,7$; $\alpha = 2^0\ 51'\ 0'',0$; $\beta = 15^0\ 53'\ 46'',2$.

70. Zwei Punkte befinden sich mit dem Fusse eines Thurmes von der Höhe h in derselben Horizontalebene, und die Verbindungslinie derselben geht in ihrer Verlängerung durch den Fuss des Thurmes; sie werden von der Spitze des letzteren unter den Depressionswinkeln α und β gesehen. Wie weit stehen beide

Punkte von einander ab? $h = 33^m,3$; $\alpha = 52^0\,7'\,30''$; $\beta = 41^0\,18'\,11'',5$.

71. Wie hoch ist das auf der Spitze eines $h = 41\frac{2}{3}$ Meter hohen Thurmes stehende Kreuz, wenn dasselbe in der horizontalen Entfernung $d = 66\frac{2}{3}$ Meter vom Fusse des Thurmes unter dem Gesichtswinkel $z = 49'\,53''$ erscheint?

72. Ein Luftballon von dem Durchmesser a, der sich lothrecht über einem Orte A erhebt, erscheint später einem in der Entfernung d von A befindlichen Beobachter unter dem Sehwinkel β. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? $a = 2^m$; $d = 800^m$; $\beta = 0^0\,4'\,34'',1$.

73. In A sieht man eine Wolke in Südwest unter einem Höhenwinkel gleich α. B liegt a Meter südlich von A; die Wolke ist hier in Nordwest. Welchen Höhenwinkel hat sie in B, und wie gross ist ihre Entfernung von der Erde? $\alpha = 43^0\,35'\,8''$; $a = 2525,94$.

74. Auf einer Anhöhe AB steht ein a Meter hoher Thurm BS. Von einem Schiffe C aus sieht man den Fuss desselben unter dem Höhenwinkel α, die Spitze unter dem Höhenwinkel β. Wieviel beträgt die horizontale Entfernung des Schiffes vom Thurm und wieviel die absolute Höhe des Berges? $a = 20$; $\alpha = 14^0\,2'\,10'',2$; $\beta = 14^0\,34'\,26'',5$.

75. Ein Thurm, dessen Höhe gleich h bekannt ist, steht mit einer Säule auf derselben Horizontalebene. Wie hoch ist die Säule, wenn der Depressionswinkel an der Spitze des Thurmes zu der Spitze der Säule gleich α und zu dem Fusse derselben gleich β ist? $h = 29^m,302$; $\alpha = 3^0\,45'\,42'',6$; $\beta = 4^0\,11'\,22'',1$.

76. Eine Mauer von der Höhe a und der Richtung Ost-Nordost nach West-Südwest wirft zu der Zeit, wo die Sonne genau im Süden steht, einen Schatten von der Breite b. Man berechne die Höhe der Sonne. $a = 4^m$; $b = 6^m,667$.

77. Um die Höhe SH eines Thurmes zu messen, welcher auf einer gegen den Horizont geneigten Fläche steht, sei auf letzterer vom Fusse H des Thurmes abwärts eine Linie $HA = d$ gemessen. In H sei ferner ein Winkelinstrument aufgestellt, dessen Höhe HD über dem Boden gleich a ist, und mittelst des horizontal gestellten Fernrohrs sei auf einer in A vertikal aufgestellten Latte die Höhe $AC = b$ abgelesen, in welcher dieselbe

von der horizontalen Visirlinie DC getroffen wird. Ferner sei in A dasselbe Winkelinstrument ($AB = HD$) aufgestellt und mit demselben der Winkel $SBE = \alpha$ gemessen, welchen die horizontale Gesichtslinie BE mit der Linie nach der Spitze des Thurmes bildet. Man berechne SH. $d = 20^m$; $a = 1^m$; $b = 2^m,95$; $\alpha = 61^0\ 1'\ 41'',4$.

c. Aufgaben aus der Physik und Mechanik.

78. Die Stärke der Erleuchtung einer zu den Sonnenstrahlen senkrechten Ebene sei gleich 1; wie stark ist die Erleuchtung derselben, wenn die Strahlen unter $23^0\ 34'\ 41'',44$ auffallen? Optik.

79. Unter welchem Winkel müssen die Strahlen der Sonne auf eine Ebene fallen, damit die Intensität ihrer Erleuchtung $\frac{1}{n}$ von derjenigen bei senkrechter Richtung der Strahlen sei?

80. Eine Lichtquelle ist von einer Ebene a^m, von einer anderen b^m entfernt, und man kann die auf jede einzelne dieser Ebenen fallenden Strahlen als einander parallel ansehen. Dieselben bilden mit der ersteren einen Winkel von 45^0. Unter welchem Winkel muss die zweite Ebene gegen die Strahlen geneigt sein, damit die Erleuchtung beider gleich stark sei?

81. Von einem gewissen Standpunkte aus erstreckt sich eine Mauer von der Höhe h nach Norden. Wie breit ist der Schatten derselben in einem Augenblicke, in welchem die Sonne in südöstlicher Richtung unter dem Höhenwinkel α erscheint?

82. Welchen Winkel müssen die von einem bestimmten Standpunkt ausgehenden (horizontalen) Richtungen der α^0 hohen Sonne und einer h^m hohen Mauer mit einander bilden, damit der Schatten der letzteren b^m breit ist?

83. Eine Säule, welche von einem Beobachter genau in Südwest erblickt wird, wirft am Mittag einen Schatten, dessen Spitze von dem Beobachter gerade in Nordwest gesehen wird. Die Elevation der Säule ist α, die Schattenlänge a^m. Wie hoch ist die Säule? $a = 2,5309$; $\alpha = 30^0\ 14'\ 2''$.

Vergleiche auch Nro. 35—41 und 65—66.

84. Wie gross ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von 10^{mm} Weite und 250^{mm} Länge?

Kräfte-Parallelogramm.

85. Auf ein Atom wirken unter rechtem Winkel zwei Kräfte, deren Intensitäten sich wie $a : b$ verhalten. Man berechne das Verhältniss der Resultante derselben zur ersten Kraft und den Winkel, welchen die Richtung der letzteren mit der Richtung der Resultante bildet. $a = 2882$; $b = 9575,7$.

86. Eine Kraft von a Kilogramm-Meter soll in zwei zu einander rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine mit ihrer Richtung den Winkel α bildet. Man berechne die Grössen der Seitenkräfte. $a = 5$, $\alpha = 36^0\ 52'\ 10'',7$.

87. Die Richtungen der auf ein Atom A wirkenden Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n bilden mit einer durch A gelegten Richtung AX bezüglich die Winkel α_1, α_2, α_3, ... α_n. Man zerlege jede derselben in zwei Seitenkräfte, sodass die Richtung der einen in AXX_1, die der anderen in der zu AX senkrechten Geraden YY_1 liegt. Zu der algebraischen Summe der in XX_1 liegenden und der algebraischen Summe der in YY_1 liegenden Seitenkräfte bestimme man endlich die Grösse und Richtung der Resultante. $P_1 = 15,04$, $P_2 = 32,80$, $P_3 = 64,41$, $P_4 = 61,019$; $\alpha_1 = 34^0\ 4'\ 0''$, $\alpha_2 = 128^0\ 17'\ 0''$, $\alpha_3 = 223^0\ 20'\ 0''$, $\alpha_4 = 252^0\ 25'\ 34''$.

Schiefe Ebene.

88. Auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten schiefen Ebene ruht eine Last von p Kilogramm. Mit welcher Kraft strebt die Last längs der Ebene herabzugleiten, und welchen Druck übt sie auf die schiefe Ebene selbst aus? $p = 30,5$, $\alpha = 26^0\ 28'\ 51'',7$.

89. Ein Körper gleite (abgesehen von der Reibung und dem Luftwiderstand) mit einer Kraft gleich p Kilogramm von einer Ebene herab und übe auf diese gleichzeitig einen Druck von q Kilogramm aus. Wie gross ist der Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont, und wie schwer ist der Körper? $p = 96,57$, $q = 100$.

90. Welche Kraft ist nöthig, um einen 700 Kilogramm schweren Wagen auf einer Eisenbahn von $\frac{1}{300}$ Steigung am Herabrollen zu hindern? (Von der Reibung wird abgesehen.)

91. Ein Körper legt in der ersten Secunde seines freien Falles 4,904 Meter, bei dem Herabgleiten von einer Ebene aber (abgesehen von den Bewegungshindernissen) $1^m,8371$ zurück. Man berechne den Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont.

92. Wie weit rollt eine Kugel auf einer Ebene von der Neigung α in t Secunden? ($g = 9^m,808$.) $t = 5$, $\alpha = 4^0\,40'\,43''$.

Hebel.

93. An dem einen, a^m langen Arme eines Hebels wirkt eine Kraft von p Kilogramm unter dem Winkel α, an dem anderen, b^m langen, eine Kraft von q Kilogramm, welche jene in's Gleichgewicht bringt. Welchen Winkel bildet die Richtung der letzteren Kraft mit dem Hebelarm? $a = 2$, $b = 5$, $p = 83$, $q = 50$, $\alpha = 68^0\,0'$.

94. An einem Hebelarm von a^m Länge wirkt eine Kraft von p Kilogramm unter dem Winkel α; an dem anderen Arm wirkt eine Kraft von q Kilogramm unter dem Winkel β gegen denselben. Wie lang ist im Falle des Gleichgewichts der zweite Hebelarm, und welchen Druck erleidet der Unterstützungspunct?

Gleichförmige Bewegung.

95. Durch den höchsten Punkt eines vertikalen, sich in jeder Secunde um 1^0 um eine durch seinen Mittelpunkt gehende horizontale Axe drehenden Kreises, dessen Radius 2^m beträgt, ist eine unbewegliche Tangente gelegt. Um wieviel ist der Punkt von seinem anfänglichen Orte nach 5 Secunden in der Richtung der Tangente fortgerückt?

96. Eine Kanone ist auf einen bestimmten Punkt eines sich bewegenden Schiffes so gerichtet, dass die Richtung des Rohres mit der des Schiffes einen rechten Winkel bildet. Wenn nun die Geschwindigkeit der abgeschossenen Kugel 400^m, die des Schiffes 5^m beträgt, unter welchem Winkel muss dann das Rohr gegen den Zielpunkt vorwärts gerichtet werden?

97. Ein Kahn, welcher eine Geschwindigkeit von $0^m,3$ in der Secunde hat, fährt quer über einen Fluss, dessen Stromschnelligkeit 1^m in der Secunde beträgt. Um welchen Winkel wird der Kahn von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt?

98. Auf jedem Schenkel eines rechten Winkels bewegt sich vom Scheitelpunkt aus gleichzeitig ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Der erste legt in der Secunde a Meter, der zweite in derselben Zeit b^m zurück. Beide Punkte sind durch ein elastisches Band verbunden. Welche Winkel bildet das letztere mit den Schenkeln? $a = 5,9308$; $b = 19,1006$.

99. Auf einem Schenkel eines Winkels α bewegt sich vom Scheitelpunkt aus ein Punkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von a Meter in der Secunde. Wieviel Meter legt ein anderer

Punkt in jeder Secunde zurück, welcher sich auf dem anderen Schenkel gleichzeitig vom Scheitelpunkt aus so bewegt, dass er stets den Fusspunkt des vom ersteren Punkt auf seinen Schenkel gefällten Perpendikels bildet?

100. Auf dem Bogen eines Halbkreises von r Meter Radius bewegt sich ein Punkt von dem einen Endpunkt desselben aus mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von a Meter in der Secunde. Nach wieviel Secunden ist derselbe in gerader Richtung b Meter von seinem Ausgangspunkte entfernt?

d. Vermischte Aufgaben.

101. Die beiden Seiten eines 2,04 Meter hohen Dammes, dessen obere Breite 0,94 Meter beträgt, sind gegen die Horizontalebene um $38^0\ 52'\ 48'',3$ geneigt; welches ist die untere Breite desselben?

102. Die Steigung einer Chaussee betrug für eine gewisse Strecke p Procent. Unter welchem Winkel war sie gegen den Horizont geneigt?

103. In Frankreich sollen die Chausseen auf längeren Strecken eine Neigung von $4^0\ 46'\ 48'',69$ nicht übersteigen, in Oesterreich soll die Steigung höchstens $\frac{1}{18}$ betragen. Wieviel beträgt im ersteren Fall die Steigung, wieviel im letzteren die Neigung?

104. Die Flamme einer Kerze sei 1^{cm} breit; der scheinbare Durchmesser der Mondscheibe ist $31'\ 7''$. Wie weit muss man die Kerze vom Auge entfernen, damit ihre Flamme die Mondscheibe bedeckt?

105. Der Sehwinkel einer Geraden sei in einer gewissen Entfernung gleich α, an einem c^m näher gelegenen Orte gleich β, und die Schenkel der Sehwinkel bilden mit dem Objecte je ein rechtwinkeliges Dreieck. Wieviel beträgt die Grösse der Geraden?

106. Eine begrenzte gerade Linie $AB = a$ ist gegen eine unbegrenzte MN unter einem Winkel α geneigt, und der Endpunkt B der ersteren Linie, welcher der unbegrenzten am nächsten liegt, hat von derselben einen Abstand gleich b. Wie gross ist der Flächeninhalt des Trapezes, welches durch AB, die aus A und B auf MN gefällten Perpendikel und einen Theil von MN begrenzt wird? $a = 79^{cm}$; $\alpha = 56^0\ 37\frac{1}{2}'$; $b = 28^{cm}$.

107. In einem Forstrevier sollten neue Anpflanzungen vorgenommen und die Stämme auf horizontalem Boden je a^m auseinander gesetzt werden. Wie weit müsste man sie dem entsprechend auf dem Abhang eines Hügels auseinander pflanzen, der unter einem Winkel gleich α gegen den Horizont aufstiege?

§. 16. Berechnung von Grössen, welche von den Seiten und Winkeln des rechtwinkeligen Dreiecks abhängen.

1. Aus der Hypotenuse c und einem spitzen Winkel α eines rechtwinkeligen Dreiecks die auf der Hypotenuse senkrechte Höhe, sowie die durch dieselbe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse zu berechnen. $c = 118{,}81$; $\alpha = 33^0\ 23'\ 54'',6$.

2. Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks auszudrücken a) durch eine Kathete und den ihr gegenüberliegenden Winkel, b) durch eine Kathete und den ihr anliegenden Winkel, c) durch die Hypotenuse und einen spitzen Winkel.

3. Den Radius ϱ des einem rechtwinkeligen Dreieck einbeschriebenen Kreises zu berechnen a) aus einer Kathete und einem spitzen Winkel, b) aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel. a) $a = 308$; $\alpha = 76^0 18' 52''$; b) $c = 365$; $\alpha = 4^0 14' 31'',9$.

4. Ebenso den Radius ϱ_a des der Kathete a anliegenden äusseren Berührungskreises aus $a = 60$; $\beta = 74^0\ 48'\ 38'',6$.

5. Man berechne die nach dem Halbirungspunkt einer Kathete a eines rechtwinkeligen Dreiecks gehende Mittellinie a) aus dieser Kathete und einem spitzen Winkel, b) aus der anderen Kathete und einem Winkel, c) aus der Hypotenuse und einem Winkel. a) $a = 240$; $\alpha = 48^0\ 56'\ 57'',6$; b) $b = 240$; $\alpha = 53^0\ 18'\ 7''$; c) $c = 423{,}98$; $\alpha = 7^0\ 51'\ 45'',2$.

6. Die den Winkel α des rechtwinkeligen Dreiecks halbirende Transversale aus diesem Winkel und a) der Kathete a oder b) der Kathete b oder c) der Hypotenuse c zu berechnen. $\alpha = 14^0 18' 19'',2$; $a = 65{,}023$ oder $b = 255$ oder $c = 263{,}16$.

7. In einem rechtwinkeligen Dreieck sei eine Kathete a im Verhältniss $m : n$ getheilt und der Theilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden. Man berechne die Länge der so entstandenen Transversale und die Winkel, welche sie

mit den anliegenden Seiten bildet. Gegeben: $m:n = 45\frac{1}{2}:103$; $b = 60$; $\alpha = 78^0\ 34'\ 43'',7$. (Der kleinere Abschnitt von a liege an b.)

8. In einem rechtwinkeligen Dreieck theile eine Transversale den einen spitzen Winkel α im Verhältniss $m:n$. Man berechne die Länge dieser Transversale und das Verhältniss, in welchem sie die gegenüberliegende Kathete theilt. Gegeben: $m:n = 1:2$ (der kleinere Theil liege der Hypotenuse an), $\beta = 0^0\ 45'\ 55'',2$; $b = 33$.

9. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sei im Verhältniss $m:n$ getheilt, und in dem Theilpunkte D sei die Senkrechte auf der Hypotenuse errichtet, welche die längere Kathete a in einem Punkte E treffe. Man berechne die Länge von DE. — Welchen Werth muss das Verhältniss $m:n$ haben, damit DE das gegebene Dreieck halbire?

10. Wie verhält sich die Länge einer Diagonale eines regelmässigen Fünfecks zu der Länge seiner Seite?

§. 17. Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämmtlich Seiten oder Winkel derselben sind.

Es bezeichnen im Folgenden stets c die Hypotenuse, a und b die Katheten, α und β die bezüglich a und b gegenüberliegenden Winkel, h die Höhe auf der Hypotenuse, p und q die von ihr auf letzterer gebildeten, bezüglich a und b anliegenden Abschnitte, ϱ den Radius des einbeschriebenen Kreises und F den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks. Es sollen die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben, bezw. der Flächeninhalt aus den in den einzelnen Nummern angegebenen Stücken berechnet werden. — Man gebe zunächst in jedem einzelnen Fall den vollständigen Wortlaut der Aufgabe an, berechne dann die gesuchten Grössen allgemein und sodann für die Zahlenbeispiele durch Substitution der angegebenen bestimmten Werthe. — Discussionen der allgemeinen Resultate. — Es seien zur Berechnung gegeben:

1. p und h; $p = 4\frac{206}{265}$; $h = 89\frac{127}{265}$.
2. h, a; $h = 131\frac{149}{281}$; $a = 160$.
3. p, a; $p = 0,9$; $a = 1,5$.
4. h, α; $h = 60$; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48'',5$.
5. p, α; $p = 64$; $\alpha = 28^0\ 4'\ 20'',9$.

Die gegebenen Stücke bestimmen unmittelbar ein zweites rechtwinkeliges Dreieck, dessen Auflösung unmittelbare Bestimmungstücke des ersten liefert.

6. $a : b = m : n,\ c;\ m : n = 224 : 207,\ c = 2{,}745.$

7. $a : b = m : n, h;\ m : n = 24 : 7;\ h = 168.$

Aehnliche Aufgaben sind a) $c : a, b$; b) $c : a, h$; c) $c : a, p$. — Durch das gegebene Verhältniss ist unmittelbar ein Winkel bestimmt.

8. $\alpha - \beta = \delta,\ c;\ \delta = 84^0\ 7'\ 29'',2,\ c = 22{,}83.$

Aehnlich: a) $\alpha - \beta, a$; b) $\alpha - \beta, b$; c) $\alpha - \beta, h$; d) $\alpha - \beta, p$. — Man verbinde die gegebene Differenz der Winkel mit der Summe derselben.

9. $F, a;\ F = 2{,}3184;\ a = 2{,}24.$

10. $p, c;\ p = 15\frac{565}{629};\ c = 629.$

11. $h, c;\ h = 76{,}6244;\ c = 205.$

12. $p - q = d,\ c;\ d = 29\frac{8}{37},\ c = 37.$

13. $p - q = d,\ a;\ d = 57\frac{422}{481};\ a = 360.$

14. $p - q = d,\ h;\ d = 198{,}73;\ h = 34{,}32.$

15. $a : b = m : n,\ F;\ m : n = 11{,}52 : 7;\ F = 252.$

Aehnlich a) p, q; b) h, F; c) c, F; d) $p - q, b$. — Mit Hilfe je einer bekannten Gleichung ergeben sich die nöthigen unmittelbaren Bestimmungsstücke ohne Anwendung der Trigonometrie, also durch eine algebraische Rechnung (Gleichungen 1. oder 2. Grades).

16. $a + b = s, F;\ s = 487;\ F = 23760.$

17. $c + a = s,\ p;\ s = 58{,}474;\ p = 27\frac{9}{40}.$

18. $c + a = s,\ q;\ s = 534{,}65,\ q = 234{,}09.$

Aehnlich a) $a - b, F$, b) $c - a, p$, c) $c - a, q$. — Die Auflösung kann mittelst eines ähnlichen Verfahrens wie vorher gefunden werden.

19. $a + b = s,\ c;\ s = 503,\ c = 425.$

20. $c + a = s,\ b;\ s = 7{,}22;\ b = 5{,}7.$

Aehnlich a) $a - b = d, c$; b) $c - a, b$. Auflösung wie vorher, oder indem man aus den gegebenen Stücken durch Division eine Gleichung für eine Function eines Winkels ableitet und dieselbe auflöst.

21. $a + b = s,\ \alpha;\ s = 409;\ \alpha = 26^0\ 28'\ 51'',7.$

22. $c + a = s,\ \alpha;\ s = 10{,}58;\ \alpha = 38^0\ 52'\ 48'',3.$

23. $a + b = s, c : a = m : n;\ s = 149{,}1;\ m : n = 353 : 272.$

Aehnlich a) $a - b,\ \alpha$; b) $c - a,\ \alpha$; c) $a - b, c : a$; d) $c + a,\ a : b$; e) $c - a, a : b$. Auflösung durch Ableitung einer neuen Gleichung zwischen den zwei Seiten, oder einer Gleichung für die dritte Seite, mittelst des (unmittelbar oder durch eine seiner Functionen) gegebenen Winkels.

24. $p + h = s,\ a;\ s = 12;\ a = 6\sqrt{2}.$

25. $p + h = s,\ \alpha;\ s = 2{,}7735;\ \alpha = 33^0\ 41'\ 24'',4.$

26. $a + h = s,\ p;\ s = 3 + \sqrt{6};\ p = \sqrt{3}.$

27. $a + h = s,\ \alpha;\ s = 9{,}3707;\ \alpha = 29^0\ 3'\ 16'',6.$

Aehnlich a) $h-p, a$; b) $h-p, \alpha$; c) $a-h, p$; d) $a-h, \alpha$; e) $a+h, p:a$; f) $a-h, p:a$; g) $a+p, p:h$; h) $a-p, p:h$; i) $p+h, a:p$; k) $p-h, a:p$; l) $a+h, a:b$; m) $a+h, c:a$, u. s. w. — Die Aufgaben lassen sich auf eine der Aufgaben 19—23 zurückführen.

28. $a+b+c=u, \alpha$; $u=9{,}18$; $\alpha=60^0\ 55'\ 51'',9$.

29. $a+b-c=d, \alpha$; $d=12$; $\alpha=70^0\ 26'\ 6'',7$.

Aehnlich a) $a+c-b, \alpha$; b) $a+b+c, a:b$; c) $a+b-c, c:a$, u. s. w., ferner d) $a+p+h, \alpha$; e) $h+p-a, \alpha$; f) $h+p+a, c:b$, u. dgl. m.

30. $p-q=d, \alpha$; $d=1{,}41313$; $\alpha=47^0\ 17'\ 26'',4$.

31. F, α; $F=221{,}34$; $\alpha=78^0\ 56'\ 41'',7$.

32. p, b; $p=2{,}6218$; $b=23{,}387$.

33. ϱ, α; $\varrho=17$; $\alpha=6^0\ 21'\ 34'',8$.

34. ϱ, h; $\varrho=65$; $h=154\frac{74}{349}$.

35. ϱ, F; $\varrho=7{,}7$; $F=346\frac{1}{2}$.

Auflösung durch Bildung von Gleichungen zwischen den zwei gegebenen und einem gesuchten Stück und Auflösen derselben auf das letztere.

36. $a+b=s, h$; $s=564{,}17$; $h=175{,}97$. Suche 2α.

37. $a-b=d, h$; $d=42{,}4374$; $h=1{,}53464$. Ebenso.

38. $a^2-b^2=d^2, F$; $d=43{,}2912$; $F=162{,}289$. Suche $\cot 2\alpha$.

39. $a-b=d, p-q=f$; $d=44{,}75$; $f=58{,}198$. Drücke d und f durch c und α aus; suche $\alpha-45^0$.

40. $a+b=s, \varrho$; $s=421{,}952$; $\varrho=36{,}475$. Berechne c oder $a \,.\, b$ und $a-b$.

41. $a-b=d, \varrho$; $d=19{,}6423$; $\varrho=4{,}4285$. Berechne zunächst b oder β.

42. $c \,.\, a=m^2, p$; $m^2=230861$, $p=467{,}18$. Berechne zunächst a.

43. $c+q=s, a$; $s=2696$; $a=2400$. Berechne zunächst c.

44. $c+a=s, p-q=d$; $s=441$; $d=-333{,}354$. Drücke s und d durch c und β aus.

45. $c+h=s, p$; $s=554{,}877$; $p=432{,}740$. Drücke s und p durch a und α aus; berechne $\cot \alpha$.

46. $c+h=s, \alpha$; $s=516{,}003$; $\alpha=23^0\ 46'\ 38'',3$. Berechne zunächst c.

47. $c \,.\, h=m^2, \varrho$; $m=272{,}213$; $\varrho=78$. Drücke ϱ durch c und h aus und eliminire h.

48. $a+b=s, c+a=\sigma$; $s=601$; $\sigma=729$. Eliminire b und c, berechne a.

Nr. 36—48 sind schwierigere Aufgaben, welche durch Bildung von Gleichungen ersten oder zweiten Grades zwischen den gegebenen und je einer oder mehreren der gesuchten Grössen gelöst werden können. Ein Beispiel der ausführlichen Behandlung solcher Aufgaben biete die folgende: Gegeben: $c + h = s$, $p - q = d$.

Aufgabe: Ein rechtwinkeliges Dreieck zu berechnen, wenn die Summe der Hypotenuse und der Höhe desselben gleich s und die Differenz der durch die Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte gleich d gegeben sind.

Auflösung 1: Es ist $c = p + q$, $h = \sqrt{pq}$, also $p + q + \sqrt{pq} = s$, oder in Folge der Substitution von $p = d + q$, $d + 2q + \sqrt{q(d+q)} = s$. Bei der Auflösung dieser Gleichung auf die Unbekannte q ist zu beachten, dass durch das Quadriren von $\sqrt{q(d+q)} = s - d - 2q$ behufs Entfernung des Wurzelzeichens eine neue Wurzel in die Gleichung eingeführt wird, indem die entstehende quadratische Gleichung nicht nur für das hier allein gültige positive Vorzeichen der Wurzel, sondern auch für das negative gilt, somit nicht nur die Aufgabe für $c + h = s$, sondern auch die entsprechende für $c - h = s$ löst. Von den beiden Resultaten der quadratischen Gleichung, $q = \frac{4s - 3d \pm \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, ist daher nur dasjenige beizubehalten, für welches $s > c$ ist. Es ergiebt sich nun leicht weiter $p = d + q = \frac{4s + 3d \pm \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, $c = p + q = \frac{8s \pm 2\sqrt{4s^2 - 3d^2}}{6}$, und die Bedingung $s > c$ führt auf $6s > 8s + 2\sqrt{4s^2 - 3d^2}$, welche offenbar nur durch den negativen Wurzelwerth erfüllt werden kann. Man erhält also

$$c = \frac{4s - \sqrt{4s^2 - 3d^2}}{3},$$

ferner $a = \sqrt{p \,.\, c}$, $b = \sqrt{q \,.\, c}$ u. s. w. Bis hierhin ist die Aufgabe ohne Anwendung der trigonometrischen Functionen, mithin als eine rein geometrische gelöst worden. Erst die Berechnung der Winkel mit Hilfe der nunmehr als bekannt angenommenen Werthe der Seiten erfordert die Anwendung der Trigonometrie; dieselbe geschieht durch unmittelbare Anwendung der Fundamentalformeln und bedarf somit hier keiner näheren Ausführung.

Zahlenbeispiel: $s = 676{,}14$; $d = 165{,}46$.

$\log s = 2{,}83004$
$0{,}30103$
$3{,}13107$
$\log(4s^2) = 6{,}26214$
$4s^2 = 1828700$
$3d^2 = 82134$
___
1746566
$6{,}24218$
$\log w = 3{,}12109$
$w = 1321{,}58$
$4s = 2704{,}56$
___
$1382{,}98$
$3d = 496{,}38$
___
$6p = 1879{,}36$
$6q = 886{,}60$
___
$p = 313{,}23$
$q = 147{,}77$
$c = 461.$

$\log d = 2{,}21870$
$\log d^2 = 4{,}43740$
$0{,}47712$
$\log(3d^2) = 4{,}91452$
___
$\log p = 2{,}49586$
$\log c = 2{,}66370$
$\log q = 2{,}16958$
___
$\log(a^2) = 5{,}15956$
$\log(b^2) = 4{,}83328$
$\log a = 2{,}57978$
$\log b = 2{,}41664$
$a = 380$
$b = 261$

$\log \frac{a}{b} = 0{,}16314$
$\alpha = 55^0\,31'\,0''$
$\beta = 34^0\,29'\,0''$
___
$\log(ab) = 4{,}99642$
$0{,}30103$
$\log F = 4{,}69539$
$F = 49590.$

Anmerkung: Die für p und q gefundenen allgemeinen Ausdrücke lassen sich, wenn s und d durch Construction gegeben gedacht werden, leicht geometrisch construiren und führen somit auf die Auflösung der entsprechenden planimetrischen Aufgabe durch Construction. Die Ausführung des Verfahrens ist durch bekannte Sätze so vollständig angegeben, dass dieselbe an dieser Stelle übergangen werden kann.

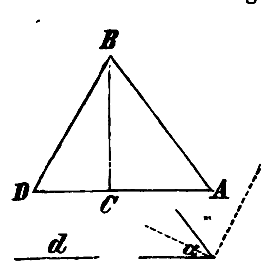
Auflösung 2: Will man aus den gegebenen Stücken direct die Winkel des Dreiecks berechnen, so kann man aus $a = c . \cos\beta$, $h = a \sin\beta$ folgern: $h = c . \cos\beta . \sin\beta = \frac{1}{2} c . \sin 2\beta$, demnach $s = c(1 + \frac{1}{2}\sin 2\beta)$. Aehnlich ergiebt sich $d = a\cos\beta - b\sin\beta = c\cos\beta^2 - c\sin\beta^2 = c\cos 2\beta$. Eliminirt man hier c, so ergiebt sich $s : d = (2 + \sin 2\beta) : 2\cos 2\beta$, welche Gleichung ohne Schwierigkeit mit Hilfe von $\sin 2\beta^2 + \cos 2\beta^2 = 1$ auf $\sin 2\beta$ oder $\cos 2\beta$ aufgelöst werden kann. Hat man so β gefunden, so folgt $c = d : \cos 2\beta$, und aus c und β ergeben sich die übrigen Stücke nach den Fundamentalformeln. — Ebenso kann man durch Elimination von β leicht direct eine Formel für c finden. Die specielle Ausführung des Verfahrens, einschliesslich der Discussion der gefundenen Werthe und des Nachweises ihrer Identität mit den in Aufl. 1 ermittelten kann nun wohl dem Leser überlassen werden.

Während in Auflösung 1 die durch Rechnung gefundenen allgemeinen Werthe zur Angabe der entsprechenden geometrischen Construction benutzt werden konnten, bedient man sich in anderen Fällen mit Vortheil der letzteren zur Auffindung der trigonometrischen Berechnung. Als ein Beispiel hierfür diene die leichtere Aufgabe, in welcher $c - b = d$ und α gegeben sind:

Aufgabe: Ein rechtwinkeliges Dreieck ans der Differenz der Hypotenuse uud einer Kathete und aus dem dieser Kathete anliegenden spitzen Winkel zu construiren, und sodann die nicht gegebenen Stücke trigonometrisch zu berechnen.

Analyse: Es sei BCA das gesuchte, bei C rechtwinkelige Dreieck, also $AB - AC$ gleich der gegebenen Differenz d und BAC gleich dem gegebenen Winkel α, so erhält man, wenn man AC über C um $CD = d$ verlängert und D mit B verbindet, ein Dreieck DBA, in welchem $AD = AC + (AB - AC) = AB$, demnach auch $\sphericalangle BDA = DBA = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ ist. Man kann daher zunächst das rechtwinkelige Hilfsdreieck BDC aus $CD = d$ und $\sphericalangle BDC$, und sodann mit seiner Hilfe das gleichschenkelige Dreieck BDA, und somit auch das gesuchte BCA construiren.

Construction: Gegeben sei die Linie d und der Winkel α. Man construire eine beliebige Gerade $DC = d$, errichte auf DC in C die Senkrechte, halbire den gegebenen Winkel α, errichte auf der Halbirungslinie im Scheitelpunkt die Senkrechte, lege an DC in D einen Winkel an, welcher gleich dem so construirten Complement von $\frac{1}{2}\alpha$ ist, und dessen angelegter Schenkel die in C errichtete Senkrechte in B treffe, lege an DB in B einen Winkel $DBA = BDA$ an, verlängere DC über C, bis die Verlängung den in B angelegten Schenkel in A schneidet, und behaupte, BCA sei das verlangte Dreieck.



Beweis: Da $\sphericalangle DBA = BDA$ nach Construction, so ist $DA = AB$, also $AB - AC = DA - AC = DC$, also gleich der gegebenen Linie d. Ferner ist der Winkel BCA ein Rechter als Nebenwinkel des nach Constr. rechten Winkels BCD, endlich ist $\sphericalangle BAC = 180^0 - (DBA + BDA)$, also, da nach Constr. $\sphericalangle DBA = BDA = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, so ist $\sphericalangle BAC = 180^0 - 2 . (90^0 - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha$, w. z. b. w.

Discussion: Der Winkel α kann selbstverständlich nur ein spitzer

sein; demnach ist $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ stets grösser als 45^0, mithin $\sphericalangle DBA$ stets $> DBC$, woraus folgt, dass die Auflösung stets möglich ist. Man erhält nur ein Dreieck.

Trigonometrische Berechnung: Es seien nach der üblichen Bezeichnungsweise des rechtwinkeligen Dreiecks $c - b = d$ und α in Zahlen gegeben; die Berechnung kann sich dem Gange der Construction anschliessen, indem man zunächst das Dreieck BCD berechnet. Da man hieraus sofort $BC = a$ erhält, so kann man dann die übrigen Stücke aus a und α unmittelbar berechnen. Man hat demnach: $\sphericalangle BDC = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$; $a : d = \mathrm{tg}(90^0 - \frac{1}{2}\alpha) = \mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha$; $a = d\,\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha$.

Demnach ist ferner $c = a : \sin\alpha = d \,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha : 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, oder $c = d : 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$.

$b = a \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha = d \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha \,.\, \mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha = d\,(\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha^2 - 1) : 2,$.

$F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2 \,\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{2}d^2\,\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \mathrm{cotg}\,\alpha$, u. s. w.

Discussion: Auch hier ergiebt sich aus den Resultaten leicht, dass dieselben stets möglich und immer nur eindeutig sind.

Zahlenbeispiel: $d = 242$; $\alpha = 49^0 14' 49'',7$, also $\beta = 40^0 45' 10'',3$.

$\frac{1}{2}\alpha = 24^0 37' 24'',85$
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha = 9,61978$
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 9,23956$
$0,30103$
$\log(2\sin\frac{1}{2}\alpha^2) = 9,54059$
$= \log N$

$\log d = 2,38382$
$\log N = 9,54059$
$\log c = 2,84323$
$c = 697$

$\log\sin\alpha = 9,87940$
$\log c = 2,84323$
$\log\cos\alpha = 9,81478$
$\log a = 2,72263$
$\log b = 2,65801$

$\log(ab) = 5,38064$
$0,30183$
$\log F = 5,07961$
$a = 528$
$b = 455$
$F = 120117$

Probe: $d = 242 = c - b = 697 - 455$.

Anmerkung: Um die vorliegende trigonometrische Aufgabe auch ohne Bezugnahme auf die Construction zu lösen, kann man setzen: $b = c \,.\, \cos\alpha$, also $d = c\,(1 - \cos\alpha) = 2c \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha^2$; $c = d : 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, wie oben. Das Weitere ergiebt sich leicht.

Ausführlicheres über Aufgaben dieser Art enthält der §. 27.

---

49. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der Summe der Höhe auf der Grundlinie und der Höhe auf einem Schenkel gleich s und aus dem Winkel α an der Grundlinie zu berechnen.

a) $s = 199,368$, $\alpha = 69^0 23' 25'',1$; b) $s = 4$; $\alpha = 70^0$;

c) $s = 32,90454$; $\alpha = 66^0 25' 18'',55$.

50. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist die Summe der Basis und der auf ihr stehenden Höhe gleich dem Doppelten des Schenkels; man berechne seine Winkel.

51. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Flächeninhalt F und dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises zu berechnen. $F = 12$, $\varrho = \frac{4}{3}$. Cubische Gleichung.

52. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Umfang u und der Höhe h auf einem Schenkel zu berechnen. $u = 36$; $h = 9\frac{3}{13}$. Cubische Gleichung.

Punkt in jeder Secunde zurück, welcher sich auf dem anderen Schenkel gleichzeitig vom Scheitelpunkt aus so bewegt, dass er stets den Fusspunkt des vom ersteren Punkt auf seinen Schenkel gefällten Perpendikels bildet?

100. Auf dem Bogen eines Halbkreises von r Meter Radius bewegt sich ein Punkt von dem einen Endpunkt desselben aus mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von a Meter in der Secunde. Nach wieviel Secunden ist derselbe in gerader Richtung b Meter von seinem Ausgangspunkte entfernt?

d. Vermischte Aufgaben.

101. Die beiden Seiten eines 2,04 Meter hohen Dammes, dessen obere Breite 0,94 Meter beträgt, sind gegen die Horizontalebene um $38^0\ 52'\ 48'',3$ geneigt; welches ist die untere Breite desselben?

102. Die Steigung einer Chaussee betrug für eine gewisse Strecke p Procent. Unter welchem Winkel war sie gegen den Horizont geneigt?

103. In Frankreich sollen die Chausseen auf längeren Strecken eine Neigung von $4^0\ 46'\ 48'',69$ nicht übersteigen, in Oesterreich soll die Steigung höchstens $\frac{1}{18}$ betragen. Wieviel beträgt im ersteren Fall die Steigung, wieviel im letzteren die Neigung?

104. Die Flamme einer Kerze sei 1^{cm} breit; der scheinbare Durchmesser der Mondscheibe ist $31'\ 7''$. Wie weit muss man die Kerze vom Auge entfernen, damit ihre Flamme die Mondscheibe bedeckt?

105. Der Sehwinkel einer Geraden sei in einer gewissen Entfernung gleich α, an einem c^m näher gelegenen Orte gleich β, und die Schenkel der Sehwinkel bilden mit dem Objecte je ein rechtwinkeliges Dreieck. Wieviel beträgt die Grösse der Geraden?

106. Eine begrenzte gerade Linie $AB = a$ ist gegen eine unbegrenzte MN unter einem Winkel α geneigt, und der Endpunkt B der ersteren Linie, welcher der unbegrenzten am nächsten liegt, hat von derselben einen Abstand gleich b. Wie gross ist der Flächeninhalt des Trapezes, welches durch AB, die aus A und B auf MN gefällten Perpendikel und einen Theil von MN begrenzt wird? $a = 79^{cm}$; $\alpha = 56^0\ 37\frac{1}{2}'$; $b = 28^{cm}$.

107. In einem Forstrevier sollten neue Anpflanzungen vorgenommen und die Stämme auf horizontalem Boden je a^m auseinander gesetzt werden. Wie weit müsste man sie dem entsprechend auf dem Abhang eines Hügels auseinander pflanzen, der unter einem Winkel gleich α gegen den Horizont aufstiege?

§. 16. Berechnung von Grössen, welche von den Seiten und Winkeln des rechtwinkeligen Dreiecks abhängen.

1. Aus der Hypotenuse c und einem spitzen Winkel α eines rechtwinkeligen Dreiecks die auf der Hypotenuse senkrechte Höhe, sowie die durch dieselbe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse zu berechnen. $c = 118,81$; $\alpha = 33^0\ 23'\ 54'',6$.

2. Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks auszudrücken a) durch eine Kathete und den ihr gegenüberliegenden Winkel, b) durch eine Kathete und den ihr anliegenden Winkel, c) durch die Hypotenuse und einen spitzen Winkel.

3. Den Radius ϱ des einem rechtwinkeligen Dreieck einbeschriebenen Kreises zu berechnen a) aus einer Kathete und einem spitzen Winkel, b) aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel. a) $a = 308$; $\alpha = 76^0 18' 52''$; b) $c = 365$; $\alpha = 4^0 14' 31'',9$.

4. Ebenso den Radius ϱ_a des der Kathete a anliegenden äusseren Berührungskreises aus $a = 60$; $\beta = 74^0\ 48'\ 38'',6$.

5. Man berechne die nach dem Halbirungspunkt einer Kathete a eines rechtwinkeligen Dreiecks gehende Mittellinie a) aus dieser Kathete und einem spitzen Winkel, b) aus der anderen Kathete und einem Winkel, c) aus der Hypotenuse und einem Winkel. a) $a = 240$; $\alpha = 48^0\ 56'\ 57'',6$; b) $b = 240$; $\alpha = 53^0\ 18'\ 7''$; c) $c = 423,98$; $\alpha = 7^0\ 51'\ 45'',2$.

6. Die den Winkel α des rechtwinkeligen Dreiecks halbirende Transversale aus diesem Winkel und a) der Kathete a oder b) der Kathete b oder c) der Hypotenuse c zu berechnen. $\alpha = 14^0 18' 19'',2$; $a = 65,023$ oder $b = 255$ oder $c = 263,16$.

7. In einem rechtwinkeligen Dreieck sei eine Kathete a im Verhältniss $m : n$ getheilt und der Theilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden. Man berechne die Länge der so entstandenen Transversale und die Winkel, welche sie

II. Das schiefwinkelige Dreieck.

§. 19. Die Fundamental-Formeln.

1. Der Durchmesser des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises lässt sich auf dreifache Art durch je eine Seite und den dieser gegenüberliegenden Winkel ausdrücken. Welche der Fundamentalformeln für das allgemeine Dreieck kann hierdurch bewiesen werden, und in welcher Gestalt ist dieselbe demnach zu schreiben, damit ihre Seiten eine einfache geometrische Bedeutung erhalten?

2. Mit Hilfe des Satzes: „Jede Winkelhalbirende eines Dreiecks theilt die gegenüberliegende Seite proportional den anliegenden", den Sinussatz abzuleiten.

3. Bestimme die Werthe der Seitenverhältnisse in denjenigen einander ähnlichen Dreiecken, deren Winkel sich wie $m:n:p$ verhalten. $m:n:p =$ a) $1:2:3$; b) $3:4:5$; c) $4:5:6$.

4. Aus den Verhältnissen der drei Seiten eines Systems ähnlicher Dreiecke, $a:b:c = m:n:p$, die Winkel derselben zu berechnen. $m:n:p =$ a) $2:3:4$; b) $3:4:6$; c) $4:9:12$.

5. Von einem Dreieck seien zwei Seiten a, b gegeben, und der Gegenwinkel α der Seite a sei zweimal so gross, als der Gegenwinkel β der Seite b. Man berechne diese Winkel. $a=353$, $b=207$.

6. Aus dem als bekannt vorausgesetzten Sinussatz und der Winkelsumme des Dreiecks den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz durch alleinige Rechnung abzuleiten.

7. Man soll umgekehrt aus dem als bekannt vorausgesetzten allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz und der Winkelsumme den Sinussatz durch Rechnung ableiten.

8. Aus dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz in zwei seiner Formen für dasselbe Dreieck und aus der Winkelsumme die dritte Form abzuleiten.

9. In einem Dreieck sei der von zwei bekannten Seiten eingeschlossene Winkel gleich 60^0; wie gross ist die dritte Seite? Ebenso, wenn der eingeschlossene Winkel gleich 45^0 ist.

10. Zwei Dreiecke stimmen in zwei Seiten überein, die eingeschlossenen Winkel ergänzen sich zu 180^0; welchen Satz erhält man über die Summe der Quadrate der dritten Seiten?

11. Die Formel $a.\cos\beta + b.\cos\alpha = c$ abzuleiten **a)** mittelst der Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, **b)** durch Rechnung aus $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ und indem man $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ mittelst des Sinussatzes durch $\sin\gamma$ und Seiten ausdrückt.

12. Aus der Formel der vorstehenden Aufgabe und den entsprechenden für a und b durch Elimination zweier Winkel den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz abzuleiten.

13. Umgekehrt aus dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze durch Rechnung die Formel $a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = c$ abzuleiten.

14. Aus dem Sinussatze durch Rechnung die Formel $\text{tang}\,\alpha = a \,.\, \sin\gamma : (b - a \,.\, \cos\gamma)$ abzuleiten.

15. Die sogenannte Tangentenformel $(a - b) : (a + b) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ kann sowohl durch Rechnung aus dem Sinussatz, als auch durch Construction (der Linien $a+b$, $a-b$ und zweier zugehörigen rechtwinkeligen Dreiecke, in denen die Winkel der Formel vorkommen) bewiesen werden. Man soll zu der im Lehrbuch gegebenen Ableitung der Formel die andere hinzufügen.

16. Ebenso für die Doppelformel: $(a - b) \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \sin\frac{1}{2}(a - \beta)$; $(a + b) \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

17. Man kann die Tangentenformel (15.) auch nach folgenden Andeutungen geometrisch beweisen: Man errichte auf der Seite AB des Dreiecks ABC in ihrem Halbirungspunkte D die Senkrechte und verlängere AC über C bis zum Durchschnitt E mit der letzteren. Die Mittelsenkrechte ED schneidet die Halbirungslinien der Winkel ECB, CBE im Mittelpunkt F des dem Dreieck CEB einbeschriebenen Kreises, und die von F auf CB gefällte Senkrechte FG ist der Radius des letzteren. Man zeige, dass $CG = \frac{1}{2}(a - b)$, $BG = \frac{1}{2}(a + b)$, $\sphericalangle FBG = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\sphericalangle FCG = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ ist, und drücke die Tangenten der letzteren Winkel in den betreffenden Dreiecken durch Seitenverhältnisse aus.

18. Mittelst derselben Figur, wie in 17., und Anwendung des Sinussatzes die Formeln in 16. geometrisch abzuleiten.

19. Welchen Satz erhält man aus den in 16. genannten Gleichungen, wenn man dieselben auf a und b als Unbekannte auflöst und die Resultate möglichst vereinfacht?

20. Welche Gleichung erhält man, wenn man in der in 16. genannten Doppelformel $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ setzt und nach erfolgter Entwickelung der Functionen zusammengesetzter Winkel und Elimination von β auf tang $\frac{1}{2}\alpha$ auflöst?

21. Welche Formel ergiebt sich aus den Gleichungen in 16., wenn man dieselben quadrirt und dann addirt?

22. Welche geometrische Bedeutung hat in den Formeln, welche die Tangenten der halben Winkel eines Dreiecks durch die Seiten ausdrücken, die Grösse $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, und wie lassen sich hieraus jene (gewöhnlich aus dem allgem. pyth. Lehrsatz entwickelten) Formeln geometrisch ableiten?

23. Welchen Satz erhält man, wenn man eine der Formeln, welche die Sinus der ganzen Winkel eines Dreiecks durch die Seiten ausdrücken, durch eine andere dividirt?

24. Man leite die Formel, welche cos $\frac{1}{2}\alpha$ durch die drei Seiten ausdrückt, aus der entsprechenden für sin $\frac{1}{2}\alpha$ mittelst des Satzes $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ ab, oder umgekehrt.

25. Welche Formel erhält man durch Division je zweier der in 24. genannten für die Sinus der halben Winkel geltenden Formeln? Ebenso für die Cosinus.

26. Die Tangenten der ganzen Winkel eines Dreiecks durch die drei Seiten desselben auszudrücken.

§. 20. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln.

a. Zahlenbeispiele.

1. Gegeben: $a = 635{,}953$, $\alpha = 36^0\,23'\,12'',4$, $\beta = 65^0\,36'\,0'',7$.

$a = 635{,}953$	$\log\sin\beta = 9{,}9593682$	$\log b = 2{,}9895678$
$\alpha = 36.\ 23.\ 12{,}4$	$\log a = 2{,}8034250$	$b = 976{,}265$
$\beta = 65.\ 36.\ \ 0{,}7$	$\log(1 : \sin\alpha) = 0{,}2267746$	$c = 1048{,}636$
$101.\ 59.\ 13{,}1$	$\log\sin\gamma = 9{,}9904253$	$\log c = 3{,}0206249$
$\gamma = 78.\ \ 0.\ 46{,}9.$		

2.

$a = 24,3105$ $\log \sin \beta = 9,57705$
$\alpha = 45^0\, 18'\, 2''$ $\log a = 1,38579$
$\beta = 22^0\, 11'\, 10''$ C. $\log \sin \alpha = 0,14825$
$67.\,29.\,12$
$\gamma = 112.\,30.\,48$ $\log \sin \gamma = 9,96557$
$b = 12,915$ $\log b = 1,11109$
$c = 31,594$ $\log c = 1,49961.$

3.

$b = 51$ 9,80290
$\beta = 4^0\, 20'$ 1,70757
$\gamma = 136^0\, 14'$ 1,12171
$140.\,34.$ 9,83993
$\alpha = 39.\,26.$
$a = 428,73$ 2,63218
$c = 466,88$ 2,66921.

	a	α	β	γ	b	c
4.	90	7° 21′	50° 30′	122° 9′	542,850	595,638
5.	479	82. 22	43. 20	54. 18	331,657	392,473
6.	500	10. 12	46. 36	123. 12	2051,48	2362,61
7.	795	79. 59	44. 41	55. 20	567,688	663,986
8.	804	99. 55	45. 1	35. 4	577,313	468,933
9.	820	12. 49	141. 59	25. 12	2276,63	1578,89
10.	999	77. 0	37. 58	65. 2	630,771	929,480
11.	7855	109. 20	52. 6	18. 34	6568,71	2650,56
12.	8086	19. 29	33. 1	127. 30	13209,7	19233,5
13.	6412	70. 55	56. 56	52. 9	5685,88	5357,50
14.	14	59. 29. 23″,1	67. 22. 48″,5	53. 7. 48″,4	15	13
15.	150	96. 43. 58,5	9. 31. 38,2	73. 44. 23,3	25	145
16.	120	124. 58. 33,6	11. 25. 16,3	43. 36. 10,1	29	101
17.	408	96. 57. 20,1	5. 43. 29,3	77. 19. 10,6	41	401
18.	40	93. 41. 42,8	18. 55. 28,7	67. 22. 48,5	13	37
19.	44	107. 56. 42,9	18. 55. 28,7	53. 7. 48,4	15	37
20.	102	66. 59. 25,4	33. 23. 54,6	79. 36. 40,0	61	109
21.	232	85. 11. 58,6	15. 11. 21,4	79. 36. 40,0	61	229
22.	312	131. 24. 44,0	15. 11. 21,4	33. 23. 54,6	109	229
23.	240	139. 56. 16,8	8. 10. 16,4	31. 53. 26,8	53	197

b. Anwendungen.

24. Um die Entfernung eines feindlichen Festungswerkes A von dem Orte B zu bestimmen, ist eine Linie $BC = a$ nebst den Winkeln $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$ gemessen worden. Man berechne AB. $a = 322,554$, $\beta = 60^0\, 34'$, $\gamma = 56^0\, 10$.

25. Aus zwei Strandbatterien A, B, welche 1500 Schritte auseinander liegen und deren gedachte Verbindungslinie in der westlichen Batterie A einen Winkel von 108^0 mit der Nordnadel bildet, wird ein Schiff beobachtet. Bei dem Visiren aus der Batterie A nach demselben weicht die Visirlinie in östlicher Richtung von der Nordnadel um $5\frac{1}{2}^0$ ab. Bei dem Visiren aus der Batterie B nach dem Schiffe weicht die Visirlinie in westlicher Richtung um $13\frac{1}{4}^0$ von der Nordnadel ab. Wie weit ist das beobachtete Schiff von jeder Batterie entfernt?

26. An den Endpunkten einer Geraden von der gegebenen Länge c^m befinden sich zwei Atome, welche sich gleichzeitig unter dem Winkel α, bezw. β gegen die Gerade in Bewegung setzen; das erste Atom hat eine Geschwindigkeit von a^m in der Secunde und trifft mit dem zweiten in einem Punkte zusammen. Man berechne die Geschwindigkeit des zweiten. Welchen Einfluss übt der Werth von c auf das Resultat aus? $\alpha = 14^0\ 15'\ 0'',1$, $\beta = 28^0\ 4'\ 20'',9$, $a = 65$.

27. Von einem Parallelogramm sei eine Diagonale d nebst den Winkeln φ, ψ, welche sie an ihrem einen Endpunkt mit den Seiten bildet, gegeben; man berechne die Seiten. $d = 4,06$, $\varphi = 45^0$, $\psi = 28^0\ 7'\ 31'',8$.

28. Von einem Parallelogramm sei eine Seite a, ein ihr anliegender Winkel α und der Winkel, welchen sie an ihrem anderen Endpunkt mit einer Diagonale bildet, gleich φ gegeben; man berechne die andere Seite und diese Diagonale. $a = 14,4453$, $\alpha = 22^0\ 17'\ 0'',0$, $\varphi = 10^0\ 55'\ 44'',4$.

29. Ein gleichschenkeliges Trapez aus einer Diagonale und den Winkeln, welche sie an ihrem einen Endpunkt mit den Seiten bildet, zu berechnen.

30. Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes aus den beiden parallelen Seiten und den Winkeln desselben zu berechnen.

31. Aus einer der parallelen Seiten eines Trapezes, den Winkeln, welche sie mit den nicht parallelen Seiten, und einem der Winkel, welche sie mit den Diagonalen bildet, die übrigen Seiten des Trapezes zu berechnen.

32. Aus einer Seite eines Sehnen-Vierecks und den Winkeln, welche sie mit den Diagonalen und mit einer der anderen

Seiten bildet, sollen die nicht gegebenen Seiten, die Diagonalen und der Radius des umbeschriebenen Kreises berechnet werden.

33. Die Seiten eines Vierecks aus einer Diagonale und den Winkeln, welche dieselbe mit den Seiten bildet, zu berechnen.

34. Eine Transversale theile einen Winkel eines gleichseitigen Dreiecks im Verhältniss 4 : 5. In welchem Verhältniss wird die gegenüberliegende Seite getheilt?

35. Der Winkel C an der Spitze des Dreiecks ABC, in welchem die Seite AB und die ihr anliegenden Winkel gegeben sind, sei in drei gleiche Theile getheilt. Man berechne die zugehörigen Abschnitte von AB. $AB = 3648$; $\sphericalangle A = 25^0\ 17'$, $\sphericalangle B = 63^0\ 19'$.

36. Von einem gleichschenkeligen Dreieck sei der Winkel an der Spitze gleich 2α gegeben; eine von der Spitze nach einem Punkt der Grundlinie gezogene Transversale sei gleich a und theile jenen Winkel im Verhältniss $m : n$. Wie lang sind die Schenkel des Dreiecks? $\alpha = 55^0\ 25'$, $a = 5{,}784$, $m : n = 2 : 3$.

37. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC soll eine zu BC parallele Transversale XY so gezogen werden, dass $BX = XY$ ist. Wie lang ist diese Transversale, wenn $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind? $a = 31{,}25$, $\beta = 42^0\ 13'$, $\gamma = 80^0\ 28'$.

38. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC soll zu BC eine parallele Transversale XY gezogen werden, welche gleich $BX + CY$ sei. Wie lang wird XY, wenn $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind? $a = 27{,}79$, $\beta = 47^0\,24'$, $\gamma = 97^0\,22'$.

39. Von einem Dreieck seien zwei Seiten BC, AB und der von ihnen eingeschlossene Winkel β gegeben. Man soll zwischen diesen Seiten eine Gerade XY unter gegebenem Winkel $BXY = \varphi$ gegen BA so ziehen, dass das abgeschnittene Dreieck BXY gleich $\frac{m}{n}$ des ganzen ist. Wie lang wird XY? $BC = 80$, $AB = 52$, $\beta = 29^0\ 28'$, $\varphi = 47^0\ 56'$, $m : n = 2 : 15$.

40. In einem Kreise, dessen Radius gleich r gegeben ist, sei eine Sehne $CB = a$ gezogen, und die letztere sei über B um $BA = b$ verlängert. Von A aus soll eine Secante AXY zu dem Kreis gezogen werden, so dass der Bogen BX halb so gross wie der Bogen CY wird; man berechne den Winkel CAY.

§. 21. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

a. Zahlenbeispiele.

Gegeben a, b, γ. Gesucht α) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ $= a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{b}{a}\cos\gamma}$; $\sin\alpha = a : \frac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\beta = b : \frac{c}{\sin\gamma}$;
Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1.

$a = 626{,}51$	$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3{,}054684$
$b = 898{,}05$	
$\gamma = 55^0 30' 12''$	$2\frac{b}{a}\cos\gamma = 1{,}623655$
$\log b = 2{,}9533005$	$1{,}431029$
$\log a = 2{,}7969280$	$0{,}1556484$
$\log\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}1563725$	$0{,}0778242$
$\log\cos\gamma = 9{,}7530912$	$\log c = 2{,}8747522$
$0{,}3127450$	$c = 749{,}4663$
$9{,}9094637$	
$0{,}2104937$	

$\log c = 2{,}8747522$	$\alpha = 43^0\ 32'\ 49''$
$\log\sin\gamma = 9{,}9160111$	$\beta = 80.\ 56.\ 59$
$2{,}9587411$	$\gamma = 55.\ 30.\ 12$
$\log a = 2{,}7969280$	$180.\ 0.\ 0$
$\log b = 2{,}9533005$	
$\log\sin\alpha = 9{,}8381869$	
$\log\sin\beta = 9{,}9945594$	

2.

$a = 4{,}15$	$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 5{,}36460$	$\log c = 1{,}05065$
$b = 8{,}67$		$\log\sin\gamma = 9{,}94560$
$\gamma = 118^0 5'$	$2\frac{b}{a}\cos\gamma = -1{,}96700$	$1{,}10505$
$\log b = 0{,}93802$		$\log a = 0{,}61805$
$\log a = 0{,}61805$	$7{,}33160$	$\log b = 0{,}93802$
	$0{,}86520$	$\log\sin\alpha = 9{,}51300$
$\log\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}31997$	$0{,}43260$	$\log\sin\beta = 9{,}83297$
$\log\cos\gamma = 9{,}67280n$	$\log c = 1{,}05065$	$\alpha = 19^0\ 1'\ 0''$
$0{,}63994$	$c = 11{,}237$	$\beta = 42.54.0$
$9{,}99277n$		$\gamma = 118.\ 5$
$0{,}29380n$		$180.\ 0.0.$

3. $a = 10$ $\log 220 = 2,34242$ $c^2 = 79,587$
$b = 11$ $\log \cos 50^0 = 9,80807$ $1,90084$
$\gamma = 50^0$ $2,15049$ $0,95042$
$141,413$ $c = 8,9212$

Anmerkung. Die vorstehende Formel für c ist für numerische Rechnungen zu empfehlen, wenn bloss c gesucht wird und a, b hinlänglich einfache Zahlenwerthe haben, so dass ihre Quadrate bequem ohne Logarithmen berechnet werden können, wie in dem vorstehenden Beispiel 3. Auch wenn $\log a$, $\log b$ aus einer vorhergehenden Rechnung bekannt sind, kann sie angewendet werden. Andere Formen derselben sind

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 = (a-b)^2 + 4ab \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$= [(a+b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma]^2 + [(a-b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma]^2.$$

Man kann die Unterbrechung der logarithmischen Rechnung durch Anwendung eines Hilfswinkels, mittelst der Formeln

$$\beta)\quad c = \frac{a-b}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{2\sqrt{ab}\,.\sin \frac{1}{2}\gamma}{a-b},$$

oder

$$c = (a+b) \cos \psi, \ \sin \psi = \frac{2\sqrt{ab}\,.\cos \frac{1}{2}\gamma}{a+b}$$

beseitigen, doch bieten dieselben keinen wesentlichen Vortheil dar.

Sollen die Winkel unabhängig von der Seite c gefunden werden, so kann man folgende Formeln anwenden:

$$\gamma)\quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}; \ \operatorname{tang} \beta = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}.$$

Die Rechnung mit denselben ist jedoch ebenfalls logarithmisch unterbrochen und daher für numerische Beispiele wenig empfehlenswerth. Mittelst eines Hilfswinkels können sie in die folgenden umgewandelt werden:

$$\delta)\ \text{Für } \gamma < 90^0;\ \frac{a\,.\cos \gamma}{b} = \sin \varphi^2,\ \operatorname{tang} \alpha = \frac{a\,.\sin \gamma}{b\,.\cos \varphi^2};\ a < b.$$

$$\text{für } \gamma > 90^0;\ \frac{\pm a\,.\cos \gamma}{b} = \operatorname{tang} \psi^2,\ \operatorname{tang} \alpha = \frac{a\,.\sin \gamma\,.\cos \psi^2}{b},$$

doch ist auch dieser Methode die folgende vorzuziehen:

$$\varepsilon)\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b}\,.\cot \tfrac{1}{2}\gamma.$$

4. $a = 95,7832$ $\log(a-b) = 1,7224332$
$b = 43,0076$ $\log(a+b) = 2,1423607$
$\gamma = 32^0\ 16'\ 15'',82$ $9,5800725$
$a - b = 52,7756$ $\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = 0,5386409$
$a + b = 138,7908$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 0,1187134$
$\frac{1}{2}\gamma = 16^0\ 8'\ 7'',91$

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 52^0\ 44'\ 6'',36$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 73.\ 51.\ 52,09$
$\alpha = 126.\ 35.\ 58,45$
$\beta = 21.\ 7.\ 45,73.$

5. $a = 289$ $\quad \log(b-a) = 2,49415$
$b = 601$ $\quad \log(b+a) = 2,94939$
$\gamma = 100^0\,19'\,6''$ $\quad 9,54476$
$b-a = 312$ $\quad \log \text{cotg}\, \frac{1}{2}\gamma = 9,92136$
$b+a = 890$ $\quad \log \text{tang}\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9,46614$
$\frac{1}{2}\gamma = 50^0\,9'\,33''$

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = 16^0\,18'\,14''$$
$$\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 39.\ 50.\ 27$$
$$\beta = 56.\ \ 8.\ 41$$
$$\alpha = 23.\ 32.\ 13$$

6. $b = 229$ $\quad 0,47712 \quad 2.\ 47.\ 39,2$
$c = 232$ $\quad 2,66370 \quad 82.\ 24.\ 19,3$
$\alpha = 15^0\,11'\,21'',4$ $\quad 7,81342 \quad \gamma = 85.\ 11.\ 58,5$
3 $\quad 10,87506 \quad \beta = 79.\ 36.\ 40,1$
461 $\quad 8,68848$
$7^0\,35'\,40'',7$

ζ) Werden die fehlenden Winkel mit der dritten Seite zugleich verlangt, so bedient man sich im Allgemeinen am besten der Mollweide'schen Formeln:

$$(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma = c\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Je nachdem $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ grösser oder kleiner als 45^0 ist, liefert der aus der ersten oder der zweiten Formel gewonnene Werth von c das genauere Resultat. Vergl. A. 9.

7.
$$a = 22,1497$$
$$b = 9,8276$$
$$\gamma = 150^0\,59'\,59'',98$$
$$a-b = 12,3221$$
$$a+b = 31,9773$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = 75^0\,29'\,59'',99.$$

$\log(a-b) = 1,0906847$ $\quad \log(a+b) = 1,5048418$
$\log\cos\frac{1}{2}\gamma = 9,3985997$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}\gamma = 9,9859416$
$0,4892844$ $\quad 1,4907834$
$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 8,9963551$ $\quad \log\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 9,9978541$
$\log c = 1,4929293$ $\quad = 1,4929293$

$$c = 31,11210$$
$$\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 8,9985010$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 5^0\,41'\,27'',77$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 14.\ 30.\ 0,01$$
$$\alpha = 20.\ 11.\ 27,78$$
$$\beta = 8.\ 48.\ 32,24$$

8.

$$a = 289$$
$$b = 601$$
$$\gamma = 100^0\ 19'\ 6'',4$$

$$b - a = 312$$
$$b + a = 890$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = 50^0\ 9'\ 33'',2$$

$\log(b-a) = 2,49415$	$\log(b+a) = 2,94939$
$\log\cos\tfrac{1}{2}\gamma = 9,80663$	$\log\sin\tfrac{1}{2}\gamma = 9,88527$
$2,30078$	$2,83466$
$\log\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9,44829$	$\log\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9,98217$
$\log c = 2,85249$	$= 2,85249$

$$c = 712,0$$

$$\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 9,46612$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 16^0\ 18'\ 14'',1$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) = 39.\ 50.\ 26,8$$
$$\beta = 56.\ \ 8.\ 40,9$$
$$\alpha = 23.\ 32.\ 12,7$$

9.

$b = 229$	0,47712	2,66370	8,68848
$c = 232$	9,99617	9,12111	$2^0\ 47'\ 39'',3$
$\alpha = 15^0\ 11'\ 21'',4$	0,47329	1,78481	82. 24. 19,3
3			
461	8,68797	9,99948	$\gamma = 85.\ 11.\ 58,6$
$7^0\ 35'\ 40'',7$	1,78532	1,78533	$\beta = 79.\ 36.\ 40,0$

$$a = 61$$

10.

$c = 0,0003$	$0,00000 - 4$	$0,69897 - 4$
$b = 0,0002$	$3,68557 - 10$	$0,00000$
$\alpha = 179^0\ 59'\ 59'',9$	$0,68557 - 11$	$0,69897 - 4$
0,0001	$2,98660 - 10$	$0,00000$
·0,0005	$0,69897 - 4$	$= 0,69897 - 4$
89. 59. 59,9	$a = 0,0005?$	

$$2,98660 - 10$$
$$0^0\ 0'\ 0'',20$$
$$0.\ 0.\ 0,05$$
$$\gamma = 0.\ 0.\ 0,(25)$$
$$\beta = -0.\ 0.\ 0,(15)$$
?

Warum reichen die 5stelligen Logarithmen zur Berechnung des vorstehenden Beispiels nicht hin?

11.

$a = 5{,}132$	0,21906	0,93490	8,98941
$b = 3{,}476$	9,65553	9,95028	$5^0\ 34'\ 26''$
$\gamma = 126^0\ 12'\ 14''$	9,87459	0,88518	26. 53. 53
1,656	8,98735	9,99794	$\beta =$ 32. 28. 19
8,608	0,88724 =	0,88724	$\alpha =$ 21. 19. 27
$63^0\ 6'\ 7''$	$c = 7{,}7133$		

12.

$a = 0{,}2034$	0,95952 — 2	0,49927 — 1	9,59695
$b = 0{,}1123$	0,90725	9,77055	$21^0 34' 11'',3$
$\gamma = 72^0 15' 18'',6$	0,86677 — 2	0,26982 — 1	53. 52. 20,7
0,0911	9,56542	9,96847	$\alpha =$ 75. 26. 32,0
0,3157	0,30135 — 1 =	0,30135 — 1	$\beta =$ 32. 18. 9,4
36. 7. 39,3	$c = 0{,}20015$		

13.

$a = 20{,}833$	0,41296	1,59193	9,22188
$b = 18{,}245$	9,96817	9,56732	$9^0 27' 47''$
$\gamma = 43^0\ 20'\ 20''$	0,38113	1,15925	68. 19. 50
2,588	9,21593	9,99405	$\alpha =$ 77. 47. 37
39,078	1,16520	1,16520	$\beta =$ 58. 52. 3
21. 40. 10	$c = 14{,}628$		

14.

$a = 2071$	2,26482	3,59748	8,94900
$b = 1887$	9,94753	9,66587	$5^0\ 4' 53''$
$\gamma = 55^0\ 12'\ 3''$	2,21235	3,26335	62. 23. 58,5
184	8,94729	9,99829	$\alpha =$ 67. 28. 51,5
3958	3,26506 =	3,26506	$\beta =$ 57. 19. 5,5
27. 36. 1,5	$c = 1841$		

15.

$a = 8{,}54$	0,33244	1,17406	0,11590
$b = 6{,}39$	9,99737	9,03985	$52^0 33' 22''$
$\gamma = 12^0 35' 8''$	0,32981	0,21391	83. 42. 26
2,15	9,89979	9,78389	$\alpha =$ 136. 15. 48
14,93	0,43002	0,43002	$\beta =$ 31. 9. 4
6. 17. 34	$c = 2{,}69(165)$		

16.

$a = 405{,}535$	1,71145	2,93577	0,68321
$b = 456{,}993$	9,99997	8,09244	$78^0 17' \; 0''$
$\gamma = 1^0 \, 25' \, 4''$	1,71142	1,02821	89.17.28
51,458	9,99086	9,30765	$\beta = 167.34.28$
862,528	1,72056	1,72056	$\alpha = \;\; 11.\; 0.28$
0.42.32	$c = 52{,}549$		

	a	b	γ	c	α	β
17.	0,917	0,312	$33^0 \; 7' \; 9''$	0,67748	$132^0 18' 27'',5$	$14^0 34' \, 23'',5$
18.	0,0846	0,05352	177. 3. 4	0,138178	1. 48. 22,7	1. 8. 33,3
19.	13,715	11,214	15. 22. 36	4,1552	118. 55. 49	45. 41. 35
20.	25,913	0,32195	118. 27. 55	26,068	60. 54. 45,5	0. 37. 19,5
21.	104,76	22,55	9. 1. 1,2	82,562	168. 31. 46,5	2. 27. 12,3
22.	215,18	134,16	115. 3. 11	297,92	40. 52. 10,5	24. 4. 38,5
23.	3000,9	1587,2	86. 4. 4	3297,2	65. 13. 52	28. 42. 4
24.	4527	3465	66. 6. 27	4449	68. 29. 15	45. 24. 18
25.	2068	14,9907	72. 52. 52	2063,6	106. 43. 16	0. 23. 52
26.	55,14	33,09	30. 24. 0	31,431	117. 24. 33	32. 11. 27
27.	47,99	33,14	175. 19. 10	81,064	2. 46. 8	1. 54. 42
28.	0,3184	0,1234	88. 12. 40	0,33787	70. 22. 38	21. 24. 42
29.	5,1269	1,4687	62. 9. 24	4,6269	101. 32. 32	16. 18. 4
30.	1347,11	1053,14	13. 7. 54	400,76	130. 12. 46	36. 39. 20
31.	9,9946	8,1357	0. 0. 0,4	0,000457	?	?
32.	0,0089	0,0012	89. 59. 58	0,0089805	82. 19. 17	7. 40. 45
33.	22,145	0,59525	14. 14. 14	21,569	165. 22. 26	0. 23. 20
34.	1459	399	92. 11. 18	1527,2	72. 40. 41	15. 8. 1
35.	3184	917	34. 9. 16	2479,2	133. 51. 34	11. 59. 10
36.	20,999	19,999	57. 48. 32	19,835	63. 37. 30	58. 33. 58

b) Anwendungen.

37. Um die Entfernung AB zweier Orte zu bestimmen, zwischen denen sich ein Hinderniss der Messung befindet, sind von einem dritten Punkte C aus die Entfernungen $CA = b$, $CB = a$ nebst dem Winkel $ACB = \gamma$ gemessen worden. Man berechne AB. $a = 382{,}500$, $b = 347{,}554$, $\gamma = 62^0 \, 31'$.

38. Von einem Punkte aus bewegen sich zwei Atome in geraden Linien und legen in jeder Secunde beziehungsweise a^m und b^m zurück; ihre Richtungen bilden mit einander einen Winkel gleich γ. Wie gross ist der Abstand der Atome von einander nach t Secunden? $a = 69$, $b = 73$, $\gamma = 41^0 \, 6' \, 43'',5$, $t = 4$.

39. Von einem Parallelogramm seien zwei aneinander liegende Seiten a, b und ein Winkel α gegeben; man soll seine Diagonalen berechnen. $a = 5$, $b = 6$, $\alpha = 87^0\, 8'\, 2'',4$ oder $a = 8,04$, $b = 9,85$, $\alpha = 13^0\, 45'\, 2''$.

40. Die Seiten und Winkel eines Parallelogramms aus seinen Diagonalen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel zu berechnen. $d = e = 257$, $\varphi = 14^0\, 18'\, 19'',2$.

41. Von einem Parallelogramm sei eine Seite, nebst den Winkeln, welche sie mit den Diagonalen bildet, gegeben; man berechne die andere Seite.

42. Ein gleichschenkeliges Trapez aus einer der nicht parallelen Seiten c, dem grösseren Winkel φ, welchen dieselbe mit einer Diagonale bildet, und aus der Diagonale e zu berechnen. $c = 13$, $e = 15$, $\varphi = 59^0\, 29'\, 23'',1$.

43. Von einem Trapez sind die beiden parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite und der Winkel, welchen die letztere mit einer der parallelen bildet, gegeben; man berechne die vierte Seite.

44. Von einem Sehnen-Viereck seien zwei aneinander liegende Seiten und die beiden einer nicht gegebenen Seite anliegenden Winkel gegeben; man berechne die übrigen Stücke desselben.

45. Von einem Viereck $ABCD$ seien zwei gegenüberliegende Seiten $AB = a$, $CD = c$, die Diagonale $AC = e$ und die Winkel $BAC = \varepsilon$, $DCA = \zeta$ gegeben; man berechne die übrigen Stücke desselben. $a = 3,6055$; $c = 6,40314$; $e = 6$; $\varepsilon = 56^0\, 18'\, 35'',6$; $\zeta = 51^0\, 20'\, 25'',6$.

46. Eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei in drei gleiche Theile getheilt, und jeder Theilpunkt sei mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden. Man berechne die hierdurch entstandenen Theile des Winkels an diesem Punkt und das Verhältniss einer Verbindungslinie zur Seite des Dreiecks.

47. a) Eine Secante und eine Tangente desselben Kreises schneiden sich unter dem Winkel α, der innere Abschnitt der Secante ist gleich a, der äussere gleich b. Wie gross ist der Radius des Kreises, und wie gross die Sehne, welche den auf der Peripherie liegenden Endpunkt der Secante mit dem Berüh-

rungspunkt der Tangente verbindet? $\alpha = 68^0\,18'50''$, $a = 5{,}6612$, $b = 2{,}8425$.

b) Ebenso aus denselben Stücken den Radius und den Flächeninhalt des Kreises zu berechnen für $a = 3b$, $\alpha = 60^0$.

c) Man berechne den Radius eines Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte A, B geht und eine gegebene Gerade MN berührt, wenn der Winkel α zwischen MN und der durch A und B gehenden Geraden, nebst den Abständen a, b dieser Punkte von der Linie MN bekannt ist. $\alpha = 34^0\,12'\,20'',8$, $a = 468$, $b = 1300$.

48. Von einem Dreieck seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Man berechne die Abschnitte der einen von diesen Seiten, welche durch einen Theilpunkt von der Eigenschaft entstehen, dass das Quadrat seiner Verbindungslinie mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt gleich dem Rechteck aus jenen Abschnitten ist.

49. Zwei Kreise, deren Radien bezüglich gleich R und r gegeben sind, schneiden sich so, dass die durch einen Durchschnittspunkt gelegten Tangenten mit einander den Winkel φ bilden. Man berechne die Länge der Centrallinie. $\varphi = 60^0$, $r = \frac{3}{5} R$.

§. 22. Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel.

a) Zahlenbeispiele.

1. $a = 2304{,}79$ $\quad b = 1147{,}32$ $\quad \alpha = 149^0\,59'\,59'',99$

$$\begin{aligned}
\log b &= 3{,}0596846\\
\log a &= 3{,}3626313\\
&\ 9{,}6970533\\
\log\sin\alpha &= 9{,}6989700\\
\log\sin\beta &= 9{,}3960233\\
\beta &= 14^0\,24'\,44'',56\\
\alpha+\beta &= 164.\ 24.\ 44{,}55\\
\gamma &= 15.\ 35.\ 15{,}45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 3{,}0596846\\
\log\sin\beta &= 9{,}3960233\\
&\ 3{,}6636613\\
\log\sin\gamma &= 9{,}4292867\\
\log c &= 3{,}0929480\\
c &= 1238{,}648.
\end{aligned}$$

2. $a = 704$ | $\log a = 2,8475727$
$b = 302$ | $\log b = 2,4800069$
$\beta = 25^0\ 14'\ 13'',00$ | $0,3675658$
$\log\sin\beta = 9,6297792$
$\log\sin\alpha = 9,9973450$

$\alpha =$	$83^0\ 40'\ 15'',45$	$96^0\ 19'\ 44'',5$
$\alpha + \beta =$	$108.\ 54.\ 28,45$	$121.\ 33.\ 57,5$
$\gamma =$	$71.\ 5.\ 31,55$	$58.\ 26.\ 2,4$

$\log a = 2,8475727$
$\log\sin\alpha = 9,9973450$
$2,8502277;\ 2,8502277$
$\log\sin\gamma = 9,9759097;\ 9,9304589$
$\log c = 2,8261374;\ 2,7806866$
$c = 670,0966;\ 603,5129.$

3. $a = 72630$ | $\log b = 5,0699639$
$b = 117480$ | $\log a = 4,8611160$
$\alpha = 80^0\ 0'\ 50''$ | $0,2088479$
$\log\sin\alpha = 9,9933700$
$\log\sin\beta = 0,2022179$, unmöglich!

4. $a = 13,2$ | $\log b = 1,19590$ | $c = b.\cos\alpha$
$b = 15,7$ | $\log\sin\alpha = 9,92467$ | $\log b = 1,19590$
$\alpha = 57^0 13' 15'',3$ | $1,12057$ | $\log\cos\alpha = 9,73352$
$\log a = 1,12057$ | $\log c = 0,92942$
$\log\sin\beta = 0,00000$ | $c = 8,5$
$\beta = 90^0$ (?) | $\gamma = 32^0 46' 44'',7.$

5. $a = 242$ | $\log a = 2,38382$ | $\log a = 2,38382$
$b = 767$ | $\log\sin\beta = 9,77830$ | $\log\sin\gamma = 9,86970$
$\beta = 36^0 53' 2''$ | $2,16212$ | $2,25352$
$\log b = 2,88480$ | $\log\sin\alpha = 9,27732$
$\log\sin\alpha = 9,27732$ | $2,97620$
$\alpha = 10^0 54' 58''$ | $c = 946,675$
$\gamma = 132.\ 12.\ 0.$

6. $a = 216,45$ | $2,33536$ | $2,33536$
$b = 177,01$ | $9,76507$ | $9,85243$
$\beta = 35^0 36' 20''$ | $2,10043$ | $2,48293;\ 2,48293$
$2,24800$ | $9,99462;\ 9,23034$
$\log\sin\alpha = 9,85243$ | $\log c = 2,47755;\ 1,71327$
$\alpha = 45^0 23' 27'',7;\ 134^0 36' 32'',3$ | $c = 300,29;\ 51,674$
$80.\ 59.\ 47,7;\ 170.\ 12.\ 52,3$
$\gamma = 99.\ 0.\ 12,3;\ 9.\ 47.\ 7,7.$

	a	b	β	α	γ	c
	485	840	21° 31′ 0″	12° 13′ 33″,6	146° 15′ 26″,4	1272,15
	9,197	9,399	120. 35. 0	57. 23. 40	2. 1. 20	0,38525
	77,04	91,06	51. 9. 6	41. 13. 0	87. 37. 54	116,82
	2,7548	3,5055	60. 0. 32	42. 53. 34	77. 5. 54	3,9453
	83,856	85,153	68. 10. 24	66. 5. 10	45. 44. 26	65,696
	55,55	66,66	77. 44. 40	54. 31. 13	47. 44. 7	50,481
	360	309	21. 14. 25	24. 57. 54 155. 2. 6	133. 47. 41 3. 43. 29	615,67 55,41
	9,787	8,716	38. 14. 12	44. 1. 28 135. 58. 32	97. 44. 20 5. 47. 16	13,954 1,4202
	83512	76725	0. 0. 21	0. 0. 22,86 179. 59. 37,14	179. 59. 16,14 0. 0. 1,86	160252 6795,9
	0,0049	0,0045	17. 41. 9	19. 19. 3 160. 40. 57	142. 59. 48 1. 37. 54	0,008915 0,00042177
	695	345	21. 14. 25	46. 52. 10 133. 7. 50	111. 53. 25 25. 37. 45	883,65 411,92
	80	401	84. 16. 30,7	11. 26. 58,6	84. 16. 30,7	401
	240	409	72. 56. 18,5	34. 7. 23,0	72. 56. 18,5	409
20.	560	449	51. 25. 11,7	77. 9. 36,6	51. 25. 11,7	449
21.	360	319	41. 32. 40,3	48. 27. 19,7	90°	481
22.	88	55,8	32. 22. 42,3	57. 37. 17,7	90°	104,2
23.	5,21	4,4	57. 37. 17,7	90°	32. 22. 42,3	2,79
24.	134,16	84,54	52. 9. 11			
25.	2154,6	987,3	45. 25. 16			

b) Anwendungen.

26. Von einem Parallelogramm kennt man eine Seite a, eine Diagonale d und den Winkel φ der beiden Diagonalen; man berechne die andere Diagonale und die andere Seite. $a = 35$, $d = 63$, $\varphi = 21^0\ 36'\ 30''$.

27. Ein gleichschenkeliges Trapez aus der kleineren parallelen Seite b, einem Winkel β und einer Diagonale d zu berechnen. $b = 144{,}568$, $\beta = 96^0\ 43'\ 58'',5$, $d = 290$.

28. Aus den beiden parallelen Seiten eines Trapezes, einer nicht parallelen Seite und einem Winkel an der vierten Seite diese letztere zu berechnen.

29. Von einem Sehnen-Viereck sind zwei aneinanderliegende Seiten, die von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und ein Winkel zwischen einer gegebenen und einer nicht gegebenen Seite bekannt; man berechne die übrigen Stücke desselben.

30. Von einem Viereck seien gegeben die beiden Diago-

nalen $AC = e$, $BD = f$, eine Seite $BC = b$ und die Winkel $BCD = \gamma$, $CDA = \delta$; man berechne die übrigen Stücke desselben. $b = 6{,}40314$, $e = 8$, $f = 10$, $\gamma = 88^0\,51'\,13'',9$, $\delta = 60^0\,27'\,39'',2$.

§. 23. Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten.

a) Zahlenbeispiele.

Gegeben: a, b, c; gesucht: α) $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

1. $a=35$ $b^2=5929$ $\cos\alpha = \frac{13168}{2.77.92} = \frac{1646}{77.23} = \frac{1646}{1771}$

$b=77$ $c^2=8464$

$c=92$ 14393 $\log 1646 = 3{,}2164298$

$a^2=1225$ $\log 1771 = 3{,}2482186$

13168 $\log\cos\alpha = 9{,}9682112$; $\alpha = 21^0 39' 20'',45$.

2. $a=13{,}45$ $\log b = 1{,}16316$ $b^2=211{,}99$ $\log(bc) = 2{,}35823$

$b=14{,}56$ $\log c = 1{,}19507$ $c^2=245{,}55$ $0{,}30103$

$c=15{,}67$ $\log a = 1{,}12872$ $457{,}54$ $2{,}65926$

$2{,}44191$

$\log(b^2) = 2{,}32632$ $a^2 = 180{,}90$ $\log\cos\alpha = 9{,}78265$

$\log(c^2) = 2{,}39041$ $276{,}64$ $\alpha = 52^0 40' 53''$.

$\log(a^2) = 2{,}25744$

3. $a=7$ $b^2=64$ $\cos\alpha = \frac{40}{2.40}$

$b=8$ $c^2=25$ $= 0{,}5$

$c=5$ $a^2=49$ $\alpha = 60^0$

40

Anmerkung: Die vorstehend benutzte Methode kann, weil sie logarithmisch unterbrochen ist, nur für den Fall empfohlen werden, dass a, b, c durch hinreichend kleine Zahlen angegeben sind, um ihre Quadrate bequem genug ohne Anwendung der Logarithmen finden zu können, oder auch wenn statt der Werthe von a, b, c deren Logarithmen gegeben sind.

Die Benutzung der Formeln

$$\beta)\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \text{ etc.}$$

$$\gamma)\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \text{ etc.}$$

kann mit Rücksicht auf die bequemeren Methoden ε und ζ, welche im Nachstehenden angeführt sind, für numerische Aufgaben nicht empfohlen werden. Dieselben würden für solche höchstens in dem Fall als hinreichend praktisch bezeichnet werden dürfen, dass nur ein Winkel

gesucht und auf eine Probe verzichtet würde. Für jeden Fall **unpraktisch** ist die Anwendung der Formel

$$\delta)\ \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{etc.}$$

Die Zweideutigkeit der Bestimmung eines Winkels durch seinen **Sinus** würde übrigens bei β) und δ) wegfallen, weil einerseits die **Hälften** der Winkel eines Dreiecks immer weniger als 90 Grad betragen **und** andererseits auch die beiden ganzen Winkel, welche nicht der **grössten** Seite gegenüberliegen, stets spitze sein müssen, so dass sich **für den** dritten, grössten Winkel die Frage durch die Winkelsumme **entscheidet.**

$$\varepsilon)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \text{etc.}$$

4.

$$\begin{aligned}
a &= 1{,}23456\\
b &= 2{,}34567\\
c &= 3{,}45678\\
\hline
2s &= 7{,}03701\\
\hline
s &= 3{,}518505 & \log s &= 0{,}5463582\\
s-a &= 2{,}283945 & \log(s-a) &= 0{,}3586857\\
s-b &= 1{,}172835 & \log(s-b) &= 0{,}0692370\\
s-c &= 0{,}061725 & \log(s-c) &= 0{,}7904611-2\\
\hline
& 7{,}037010
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log[(s-b)(s-c)] &= 0{,}8596981-2 & \tfrac{1}{2}\alpha &= 5^0\,25'\,18'',80\\
\log[s.(s-a)] &= 0.9050439 & \tfrac{1}{2}\beta &= 10.\ 28.\ 18{,}77\\
& 7{,}9546542 & \tfrac{1}{2}\gamma &= 74.\ \ 6.\ 22{,}43\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a &= 8{,}9773271 & & 90.\ \ 0.\ \ 0{,}00\\
\log[(s-a)(s-c)] &= 0{,}1491468-1\\
\log[s.(s-b)] &= 0{,}6155925\\
& 8{,}5335516\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta &= 9{,}2667758\\
\log[(s-a)(s-b)] &= 0{,}4279227 & \alpha &= 10^0\,50'\,37'',60\\
\log[s.(s-c)] &= 0{,}3368193-1 & \beta &= 20.\ 56.\ 37{,}54\\
& 1{,}0911034 & \gamma &= 148.\ 12.\ 44{,}86\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma &= 0{,}5455517
\end{aligned}$$

Anmerkung: Diese Methode wird ebenfalls durch die folgende ζ) übertroffen, und dürfte nur für den Fall, dass bloss ein Winkel gesucht und auf die Probe verzichtet wird, anzuwenden sein.

$$\zeta)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a},\ \text{etc.}\quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

5.

$$\begin{aligned}
a &= 3{,}41 & \log(s-a) &= 9{,}5854607\\
b &= 2{,}60 & \log(s-b) &= 0{,}0773679\\
c &= 1{,}58 & \log(s-c) &= 0{,}3453737\\
\hline
2s &= 7{,}59 & & 0{,}0082023
\end{aligned}$$

$s = 3{,}795$		$0{,}0082023$
$s - a = 0{,}385$	$\log s$	$= 0{,}5792118$
$s - b = 1{,}195$	$\log \varrho^2$	$= 9{,}4289905$
$s - c = 2{,}215$	$\log \varrho$	$= 9{,}7144952$
$7{,}590$		

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 10{,}1290345$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = 9{,}6371273$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = 9{,}3691215$

$\frac{1}{2}\alpha = 53^0\, 23'\, 20'',85$
$\frac{1}{2}\beta = 23.\ 26.\ 36{,}21$
$\frac{1}{2}\gamma = 13.\ 10.\ \ 2{,}94$
$90.\ \ 0.\ \ 0{,}00$

$\alpha = 106^0\, 46'\, 41'',70;\quad \beta = 46^0\, 53'\, 12'',42;\quad \gamma = 26^0\, 20'\, 5'',88.$

6.

$a = 317$	$\log(s - a)$	$= 2{,}55991$
$b = 533$	$\log(s - b)$	$= 2{,}16732$
$c = 510$	$\log(s - c)$	$= 2{,}23045$
$2s = 1360$		$6{,}95768$
$s = 680$	$\log s$	$= 2{,}83251$
$s - a = 363$	$\log \varrho^2$	$= 4{,}12517$
$s - b = 147$	$\log \varrho$	$= 2{,}06259$
$s - c = 170$		
1360		

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 9{,}50268$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = 9{,}89527$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma = 9{,}83214$

$\frac{1}{2}\alpha = 17^0\, 39'\ \ 1'',4$
$\frac{1}{2}\beta = 38.\ \ 9.\ 27{,}7$
$\frac{1}{2}\gamma = 34.\ 11.\ 35{,}6$
$4{,}7$

7.

$a = 289$	2,70927	9,31876	
$b = 601$	2,30103	9,72700	
$c = 712$	1,94939	0,07864	
1602	6,95969	$11^0\, 46'\ \ 6''$	$\alpha = 23^0\, 32'\, 12''$
801	2,90363	28. 4. 21	$\beta = 56.\ \ 8.\ 42$
512	4,05606	50. 9. 33	$\gamma = 100.\ 19.\ \ 6$
200	2,02803	90. 0. 0	
89			
1602			

8.

$a = 17$	2,03342	8,82391	
$b = 113$	1,07918	9,77815	
$c = 120$	0,69897	0,15836	
250	3,81157	3° 48′ 51″	$\alpha =$ 7° 37′ 42″
125	2,09691	30. 57. 49	$\beta =$ 61. 55. 38
108	1,71466	55. 13. 20	$\gamma =$ 110. 26. 40
12	0,85733	90. 0. 0	
5			
250			

9.

$a =$ 3359,4	3,39407	9,64483	
$b =$ 4216,3	3,20976	9,82914	
$c =$ 4098,7	3,24017	9,79873	
11674,4	9,84400	23. 49. 0	$\alpha =$ 47. 38. 0
5837,2	3,76620	34. 0. 33	$\beta =$ 68. 1. 6
2477,8	6,07780	32. 10. 27	$\gamma =$ 64. 20. 54
1620,9	3,03890	90. 0. 0	
1738,5			
11674,4			

10.

$a =$ 15,47	1,09342	9,58995	
$b =$ 17,39	1,02036	9,66301	
$c =$ 22,88	0,69810	9,98527	
55,74	2,81188	21. 15. 22,2	$\alpha =$ 42. 30. 44
27,87	1,44514	24. 42. 54,5	$\beta =$ 49. 25. 49
12,40	1,36674	44. 1. 43,4	$\gamma =$ 88. 3. 27
10,48	0,68337	90. 0. 0,1	
4,99			
55,74			

11.

$a =$ 3,9009	9,95785	9,96904	
$b =$ 2,7147	0,32092	9,60597	
$c =$ 3,0012	0,25701	9,66988	
9,6168	0,53578	42. 57. 33,6	$\alpha =$ 85. 55. 7
4,8084	0,68200	21. 58. 47,0	$\beta =$ 43. 57. 33
0,9075	9,85378	25. 3. 40,0	$\gamma =$ 50. 7. 20
2,0937	9,92689	90. 0. 0,6	
1,8072			
9,6168			

12. $a =$ 354,4	2,21059	9,75845	
$b =$ 277,9	2,37822	9,59082	
$c =$ 401,3	2,06258	9,90646	
1033,6	6,65139	29° 49′ 45″,0	$\alpha = 59^0\ 39'\ 30''$
516,8	2,71332	21. 17. 40,2	$\beta =$ 42. 35. 20
162,4	3,93807	38. 52. 35,6	$\gamma =$ 77. 45. 10
238,9	1,96904	90. 0. 0,8	
115,5			
1033,6			

13. $a =$ 5,134	0,75766	9,47522	
$b =$ 7,268	0,55503	9,67785	
$c =$ 9,[illegible]	0,18879	0,04409	
21,715	1,50148	16. 37. 49,6	$\alpha =$ 33. 15. 39
10,8575	1,03573	25. 28. 0,0	$\beta =$ 50. 56. 0
5,7235	0,46575	47. 54. 10,7	$\gamma =$ 95. 48. 21
3,5895	0,23288	90. 0. 0,3	
1,5445			
21,7150			

14. $a =$ 0,099	8,90309	9,52919	
$b =$ 0,101	8,89209	9,54019	
$c =$ 0,158	8,32222	0,11006	
0,358	6,11740	18. 41. 9,6	$\alpha =$ 37. 22. 19
0,179	9,25285	19. 7. 50,5	$\beta =$ 38. 15. 41
0,080	6,86455	52. 11. 0,0	$\gamma =$ 104. 22. 0
0,078	8,43228	90. 0. 0,1	
0,021			
0,358			

15. $a =$ 33,112	1,52145	9,52141	
$b =$ 44,224	1,34463	9,69823	
$c =$ 55,336	1,04139	0,00147	
132,672	3,90747	18. 22. 37,1	$\alpha =$ 36. 45. 14
66,336	1,82175	26. 31. 34,0	$\beta =$ 53. 3. 8
33,224	2,08572	45. 5. 48,4	$\gamma =$ 90. 11. 38
22,112	1,04286	89. 59. 59,5	
11,000			
132,672			

	a	b	c	α	β	γ
16.	51	65	[illegible]	[illegible] 52' 45"	[illegible] 52' 12"	14° 15' 4"
17.	78	101	29	32. 1. 54	136. 23. 50	11. 25. 16
18.	111	145	[illegible]	27. 38. 32	143. 7. 48	9. 31. 40
19.	21	36	[illegible]	42. 6. 12,6	36. 6. 36	31. 47. 11,4
20.	19	34	[illegible]	14. 25. 36	30. 24. 0	133. 10. 24
21.	43	50	57	46. 43. 34	57. 30. 44	75. 10. 42
22.	37	58	79	25. 0. 28	43. 25. 20	111. 34. 12
23.	73	82	91	49. 34. 58	55. 46. 58	71. 38. 4
24.	39	74	1?0	19. 50. 34	21. 12. 42	147. 47. 44
25.	62	122	132	6. 0. 32	11. 53. 16	162. 6. 12
26.	61	106	151	18. 44. 0	33. 55. 30	127. 20. 30
27.	74	130	136	17. 53. 46	32. 40. 26	129. 25. 48
28.	14,493	55,4363	66,9129	8. 20.	33. 40	138. 0
29.	559,138	591,838	890½	38. 0.	40. 40	101. 20
30.	6693,43	7392½	9999⅓	42. 1.	47. 40	90. 19
31	[illegible]	[illegible]	[illegible]	51. 55.	62. 40	65. 25
32.	79,51117	89.364	89,88	52. 40.	63. 20	64. 0
33.	140	183,865	49,467	23. 43. 10	148. 6. 34	8. 10. 16
34.	195	257	67,993	20. 55. 12	151. 55. 40	7. 9. 8
35.	216	285,44	74,638	18. 41. 52	154. 56. 32	6. 21. 36

b. Anwendungen.

36. Drei Kreise berühren sich von Aussen; ihre Radien sind bezüglich R, r, ϱ. Man berechne die Winkel, welche die Centrallinien an den Mittelpunkten bilden. $\varrho = 0{,}82888$, $r = 0{,}86616$, $R = 0{,}89880$.

37. Von zwei Punkten B, C am Saume eines Waldes, deren Entfernung von einander gleich a^m ist, sollen Gänge durch den Wald gehauen werden, welche sich in einem Punkte treffen, so dass der eine von ihnen b^m, der andere c^m lang wird. Unter welchen Winkeln gegen BC sind die Gänge zu legen? $a = 55{,}448$, $b = 45{,}2$, $c = 51{,}1$.

38. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint ein Gegenstand von 7^{dc} Länge einem Beobachter, dessen Auge von dem einen Ende desselben um 5^{dc}, von dem anderen um 8^{dc} entfernt ist?

39. Die Seiten a, b, c eines Dreiecks seien gegeben; die Seite $BC = a$ sei in drei gleiche Theile getheilt, und von dem B zunächst liegenden Theilpunkte sei eine Gerade nach der

Spitze A gezogen. Wie lang ist diese Linie? $a = 30$, $b = 16$, $c = 24$.

40. Aus den beiden Diagonalen und einer Seite eines Parallelogramms die andere Seite und die Winkel desselben zu berechnen.

41. Ein gleichschenkeliges Trapez aus zwei aneinander liegenden Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

42. Die Winkel und die Diagonalen eines Trapezes aus seinen vier Seiten zu berechnen.

43. Ebenso die fehlenden Stücke aus den parallelen Seiten und den beiden Diagonalen.

44. Ein Tangenten-Viereck aus drei Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

45. Ein Viereck aus den vier Seiten a, b, c, d und einer Diagonale e (welche die Endpunkte der aneinander liegenden Seiten a, b verbindet) zu berechnen. $a = 6{,}40314$, $b = 7{,}81033$, $c = 9{,}2196$, $d = 8{,}06225$, $e = 10$.

46. Von den Endpunkten einer Strecke BC, deren Länge gleich a^m gegeben ist, gehen gleichzeitig Boten nach einem seitlich gelegenen Orte A ab, der eine mit einer Geschwindigkeit von p^m, der andere mit einer solchen von q^m in der Secunde. Beide gelangen nach t Stunden gleichzeitig in A an. Unter welchen Winkeln waren ihre Wege gegen BC geneigt?

§. 24. Berechnung des Flächeninhalts.

a. Zahlenbeispiele.

α) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen.

	1.		1a.
a =	4600,420	b =	21,66
b =	5271,806	c =	36,94
γ =	$36^0 24' 11'',2$	α =	$66^0 4' 19''$
$\log a$ =	3,6627975	$\log b$ =	1,33566
$\log b$ =	3,7219594	$\log c$ =	1,56750
$\log \sin \gamma$ =	9,7733934	$\log \sin \alpha$ =	9,96097
	7,1581503		2,86413
	0,3010300		0,30103
$\log F$ =	6,8571203	$\log F$ =	2,56310
F =	7196483	F =	365,68

2.

$$\begin{aligned} a &= 4474{,}5 \\ b &= 2164{,}5 \\ \gamma &= 116^0\ 30'\ 20'' \\ \hline & 3{,}65075 \\ & 3{,}33536 \\ & 9{,}95177 \\ \hline & 6{,}93788 \\ & 6{,}63685 \\ F &= 4333600. \end{aligned}$$

2a.

$$\begin{aligned} a &= 15 \\ c &= 20 \\ \beta &= 25^0\ 40',3 \\ \hline \log \tfrac{1}{2}(ac) &= 2{,}17609 \\ \log \sin \beta &= 9{,}63670 \\ & \quad 1{,}81279 \\ F &= 65;\ (64{,}982). \end{aligned}$$

	a	b	γ	F		a	c	β	F
3.	303	401	$5^0\ 43'\ 29'',5$	6060	6.	510	173	$162^0\ 30'\ 28''$	13260
4.	366	485	5. 12. 18,5	8052	7.	591	200	163. 44. 24	16548
5.	435	577	4. 46. 18,7	10440	8.	120	101	11. 25. 16,3	1200

β) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

9.

$$\begin{aligned} a &= 346{,}5 \\ b &= 798{,}4 \\ c &= 612{,}7 \\ \hline 2s &= 1757{,}6 \\ \hline s &= 878{,}8 \\ s - a &= 532{,}3 \\ s - b &= 80{,}4 \\ s - c &= 266{,}1 \\ \hline & 1757{,}6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 2{,}7261565 \\ \log(s-b) &= 1{,}9052560 \\ \log(s-c) &= 2{,}4250449 \\ \log s &= 2{,}9438900 \\ \hline & 10{,}0003474 \\ \log F &= 5{,}0001737 \\ F &= 100040 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} a &= 46{,}78 \\ b &= 35{,}90 \\ c &= 77{,}00 \\ \hline & 159{,}68 \\ \hline & 79{,}84 \\ & 33{,}06 \\ & 43{,}94 \\ & 159{,}84 \\ \hline & 2{,}68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1{,}51930 \\ & 1{,}64286 \\ & 0{,}45332 \\ & 1{,}90222 \\ \hline & 5{,}51770 \\ & 2{,}75885 \\ F &= 573{,}91 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} a &= 150 \\ b &= 25 \\ c &= 145 \\ \hline 2s &= 320 \\ \hline s &= 160 \\ s-a &= 10 \\ s-b &= 135 \\ s-c &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F &= \sqrt{160.\ 10.\ 135.\ 15} \\ &= \sqrt{10^2.\ 4^2.\ 15^2.\ 3^2} \\ &= 10.\ 4.\ 15.\ 3 \\ &= 1800. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 5 \\ c &= 7 \\ \hline & 16 \\ \hline & 8 \\ & 4 \\ & 3 \\ & 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & F = \sqrt{96} \\ & 1{,}98227 \\ & 0{,}99114 \\ & 9{,}798 = F. \end{aligned}$$

	a	b	c	F		a	b	c	F
13.	408	41	401	8160	18.	312	109	229	9360
14.	40	13	37	240	19.	240	53	197	3360
15.	44	15	37	264	20.	200	85	205	8400
16.	102	61	109	3060	21.	450	85	445	18900
17.	232	61	229	6960	22.	624	205	445	26208

γ) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln desselben zu berechnen.

23.

$$\begin{aligned} a &= 669 \\ \alpha &= 49^0\ 17'\ 10'' \\ \beta &= 95.\ 36.\ 20 \\ \hline & 144.\ 53.\ 30 \\ \gamma &= 35.\ 6.\ 30 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log a &= 2{,}8254261 \\ \log (a^2) &= 5{,}6508522 \\ \hline \log (\tfrac{1}{2}\, a^2) &= 5{,}3498222 \\ \log \sin \beta &= 9{,}9979182 \\ \log \sin \gamma &= 9{,}7597617 \\ \hline & 5{,}1075021 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}8796556 \\ \hline \log F &= 5{,}2278465 \\ F &= 168984{,}3\,.. \end{aligned}$$

24.

$$\begin{array}{rl} a = & 317 \\ \alpha = & 35^0\,18'\;\;0'',9 \\ \beta = & 76.\;18.\;52,0 \\ \hline & 111.\;36.\;52,9 \\ \gamma = & 68.\;23.\;\;7,1 \\ \log a = & 2,50106 \\ & 5,00212 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\frac{1}{2}a^2) = & 4,70109 \\ \log\sin\beta = & 9,98749 \\ \log\sin\gamma = & 9,96834 \\ \hline & 4,65692 \\ \log\sin\alpha = & 9,76182 \\ \log F = & 4,89510 \\ F = & 78542 \end{array}$$

25. $b=149$, $\alpha=70^0 42' 30'',0$, $\beta=39^0 18' 27'',5$, $F=15540$.

26. $c=325$, $\beta=6^0 21' 34'',8$, $\gamma=25^0 3' 27'',4$, $F=7200$.

δ) Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.

27.

$$\begin{array}{rl} a = & 444,44 \\ c = & 777,77 \\ \gamma = & 42^0\,15'\,16'',30 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2,6478131 \\ \log c = & 2,8908512 \\ & 9,7569619 \\ \log\sin\gamma = & 9,8276441 \\ \log\sin\alpha = & 9,5846060 \\ \alpha = & 22^0 35' 48'',32 \\ \beta = & 115.\;\;8.55,38 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log(ac) = & 5,5386643 \\ \log\sin\beta = & 9,9567483 \\ \hline & 5,4954126 \\ & 0,3010300 \\ \hline \log F = & 5,1943826 \\ F = & 156452,5 \end{array}$$

28.

$$\begin{array}{rl} a = & 215,9 \\ c = & 307,7 \\ \alpha = & 25^0\,9'\,31'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c = & 2,48813 \\ \log a = & 2,33425 \\ & 0,15388 \\ \log\sin\alpha = & 9,62852 \\ \log\sin\gamma = & 9,78240 \\ \hline \gamma_1 = & 37^0\,17'\,37'',5 \\ \beta_1 = & 117.\;32.\;51,5 \\ \hline \gamma_2 = & 142.\;42.\;22,5 \\ \beta_2 = & 12.\;\;8.\;\;6,5 \end{array}$$

$$\log (a c) = 4{,}82238$$
$$\log \sin \beta_1 = 9{,}94774$$
$$4{,}77012$$
$$\log F_1 = 4{,}46909$$
$$F_1 = 29450$$

$$\log (a c) = 4{,}82238$$
$$\log \sin \beta_2 = 9{,}32267$$
$$4{,}14505$$
$$\log F_2 = 3{,}84402$$
$$F_2 = 6982{,}7$$

29. $a = 318$, $b = 181$, $\alpha = 64^0\, 58'\, 38'',5$, $F = 28620$.

30. $b = 73$, $c = 577$, $\beta = 4^0\, 46'\, 18'',8$, $F_1 = 15120$, $F_2 = 12480{,}3$.

31. $a = 760$, $c = 761$, $\alpha = 87^0\, 3'\, 44'',6$, $F = 14820$.

Berechnung des Flächeninhalts zu den Aufgaben in §. 20—23.

b. Anwendungen.

32. Den Flächeninhalt eines Vierecks zu berechnen, welches durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Seite $e = 25$ und bezüglich den nicht gemeinschaftlichen Seiten $a = 56$, $b = 39$ und $c = 63$, $d = 52$ zerlegt wird.

33. Den Flächeninhalt eines Fünfecks $ABCDE$ zu berechnen, von welchem die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$ und die Diagonalen $AC = f$, $AD = g$ gegeben sind. $a = 21$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 14$, $e = 15$, $f = 20$, $g = 13$.

34. Ein Sechseck $ABCDEF$ sei durch gerade Linien, welche von einem Punkte M im Innern desselben nach den Eckpunkten gehen, in sechs Dreiecke getheilt, und es sei $MA = 25$, $MB = 39$, $MC = 45$, $MD = 39$, $ME = 25$, $MF = 52$, $AB = 16$, $BC = 42$, $CD = 42$, $DE = 16$, $EF = 33$, $FA = 63$ gemessen. Man berechne den Inhalt des Sechsecks.

35. Den Flächeninhalt eines Parallelogramms aus zwei aneinanderliegenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen.

36. Den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes aus den beiden parallelen Seiten und einem spitzen Winkel zu berechnen.

37. Den Flächeninhalt eines Trapezes aus den beiden parallelen Seiten, einer nicht parallelen Seite und dem von letzterer mit der grösseren parallelen gebildeten Winkel zu berechnen.

38. Den Flächeninhalt eines Vierecks aus den vier Seiten a, b, c, d und einem Winkel $d/a = \alpha$ zu berechnen. $a = 26{,}5$, $b = 17$, $c = 113$, $d = 98{,}5$, $\alpha = 139^0\ 56'\ 16'',8$.

39. Man leite für den Flächeninhalt eines Vierecks aus drei auf einander folgenden Seiten $a\,b\,c$ und den eingeschlossenen Winkeln $a/b = \beta$, $b/c = \gamma$ die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}\, bc \sin\gamma + \tfrac{1}{2}\, ab \sin\beta - \tfrac{1}{2}\, ac \sin(\beta + \gamma)$$

ab und drücke dieselbe geometrisch durch drei Dreiecke aus.

40. Von einem Viereck seien zwei Gegenseiten b, d und die vier Winkel α, β, γ, δ gegeben. Man beweise für den Flächeninhalt desselben die Formel:

$$F = \tfrac{1}{2}\, d^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)} + \tfrac{1}{2}\, b^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

41. Zu beweisen: Die Fläche eines jeden Vierecks ist gleich dem halben Product seiner Diagonalen und des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

42. Den Flächeninhalt eines Sehnen-Vierecks aus den 4 Seiten desselben zu berechnen.

Drücke eine Diagonale doppelt durch die Seiten und einen Winkel aus, berechne daraus die erforderlichen Functionen dieses Winkels. Sind a, b, c, d die gegebenen Seiten, $a + b + c + d = 2s$, so ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

43. Den Flächeninhalt eines Vierecks zu berechnen, in welchem zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich sind, wenn die 4 Seiten gegeben sind. Vergl. 42.

44. Mit Hilfe der Trigonometrie das Verhältniss der Flächeninhalte zweier Dreiecke zu bestimmen, welche einen Winkel gleich haben.

45. Unter allen Dreiecken, welche zwei gegebene Seiten haben, auf trigonometrischem Wege das grösste zu bestimmen.

46. Welche Formel erhält man, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks auf dreifache Weise durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, sodann den letzteren in einer dieser drei Formeln durch die beiden anderen Winkel ausdrückt und für die Sinus dieser letzteren aus den beiden anderen Formeln substituirt?

47. Welche Formel erhält man, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks auf dreifache Weise durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausdrückt, zwei dieser Gleichungen mit einander multiplicirt und das Resultat durch die dritte dividirt?

48. Zwischen den Seiten AB und AC eines Dreiecks, von welchem $BC = a$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ gegeben sind, soll eine Linie XY von gegebener Länge d so gezogen werden, dass das abgeschnittene Viereck $BCXY$ einen gegebenen Inhalt F habe. Man berechne AX und AY. $a = 9{,}35$, $\beta = 65^0$, $\gamma = 59^0$, $d = 7{,}27$, $F = 19{,}1535$.

49. Das Verhältniss des Flächeninhaltes eines Dreiecks zu dem Flächeninhalt des demselben umbeschriebenen Kreises durch goniometrische Functionen der Dreieckswinkel und die Zahl π zu bestimmen.

§. 25. Formeln und Lehrsätze für das schiefwinkelige Dreieck zum Beweisen.

1. $c - b\cos\alpha = \sqrt{a^2 - b^2\sin\alpha^2}$.

2. $a^2 - b^2 = c \,.\, (a \,.\, \cos\beta - b \,.\, \cos\alpha)$.

3. $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,(a^2+b^2)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - (a-b)^2}{4\,ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2}$.

4. $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 = \dfrac{(a+b)^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{4\,ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2}$.

5. $c^2 = [a+b+2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma] \,.\, [a+b-2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma]$
$= [a-b+2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma] \,.\, [a-b-2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma]$.

6. $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{2\,ab\sin\gamma^2}{a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma}$.

7. $\cos(\alpha-\beta) = 2\,ab\sin\gamma^2 : (a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma) - \cos\gamma$.

8. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{s-c}{c}$; $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{s-b}{c}$.

9. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{1}{c}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \dfrac{\varrho}{c}$;
$\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{\varrho_a}{c}$.

10. $\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \sin\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$;
$\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s\,(s-b)(s-c)}{abc}$.

11. $\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta = c^2 : ab \sin \gamma$;
$\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta = (b^2 - a^2) : ab \sin \gamma$.

12. $\frac{ab}{c} \sin \gamma = c \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$.

13. Ist $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, so ist $\alpha = 120^0$.

14. $a^2 = (b + c)^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 + (b - c)^2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2$.

15. $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta$;
$\frac{a+b+c}{a+c-a} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma$; $\frac{a+b-c}{b+c-a} = ?$

16. $\frac{a+b}{a+b+c} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta)$;
$\frac{a-b}{a+b+c} = \frac{1}{2} (\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma$.

Aehnliche Formeln für $\frac{a+b}{a+b-c}$, $\frac{a-b}{a+b-c}$, $\frac{a+b}{a-b+c}$, $\frac{a-b}{a-b+c}$?

17. $ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$
$ab \cos \gamma - ac \cos \beta - bc \cos \alpha = \frac{1}{2} (3c^2 - a^2 - b^2)$.

18. $\frac{1}{2}(a+b+c) = a \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) + b \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} (\alpha - \gamma)$
$+ c \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$;
$\frac{1}{2}(a+b-c) = a \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma) + b \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} (\alpha - \gamma)$
$+ c \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$.

19. $\frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} = \frac{a^2 - ab \cos \gamma}{b^2 - ab \cos \gamma}$. 20. $\frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 - a^2 + b^2}$.

21. $2\, abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = abc - ac^2 \cos \alpha - a^2 b \cos \beta$
$- b^2 c \cos \gamma + ab^2 \cos \beta \cos \gamma + a^2 c \cos \alpha \cos \beta$
$+ bc^2 \cos \alpha \cos \gamma$.

22. $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta = [a^2 \sin \beta + bc \sin \gamma - ab \sin \alpha]$:
$[(c - a \cos \beta)(a - b \cos \gamma)]$.

23. $\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta =$
$[bc \sin \alpha + ac \sin \beta - ab \sin \gamma] : ab \sin \alpha \sin \beta$.

24. $2c \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = (a + b - c) \sin \frac{1}{2} \gamma$;
$2c \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta = (a - b + c) \cos \frac{1}{2} \gamma$.

25. $\frac{a}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = c \cdot \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} + \frac{\cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \gamma}\right)$;
$\frac{b-c}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = c \cdot \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} - \frac{\cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \gamma}\right)$.

26. $4\, abc \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) =$
$(a - b)(a + b + c)(a + b - c)$.

27. $c^2 : \sin\gamma = (a^2 - b^2) : \sin(\alpha - \beta)$.

28. $2\,ab = (a^2 + b^2)\cos\gamma + c^2\cos(\alpha - \beta)$.

29. Ist $\alpha = 2\beta$, so ist $a^2 = b\,(b + c)$.

30. $\dfrac{s^3}{abc} = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma}{\sec\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sec\frac{1}{2}\beta \,.\, \sec\frac{1}{2}\gamma}$.

31. $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\alpha + \gamma) = \dfrac{b+c}{b-c}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

32. $a^3 = ab^2 + ac^2 - c^3 \,.\, \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta : \sin\gamma^2$.

33. $bc : a^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma) : \sin\alpha^2$.

34. $a - c = c \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma + a \,.\, \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\frac{1}{2}\alpha$.

35. $a - 2b + c = c \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma -$
$a \,.\, \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\frac{1}{2}\alpha$.

36. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma =$
$2b : (a + b + c)$.

37. $\dfrac{a^2 \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{b^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\gamma}{\sin\beta} = \dfrac{c^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin\gamma}$.

38. $\sin\alpha = 2F : bc$; $\sin\beta = 2F : ac$; $\sin\gamma = 2F : ab$.

39. $\dfrac{F}{c}\cdot\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \cos\frac{1}{2}\gamma \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;
$\dfrac{F}{c}\cdot\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) = \sin\frac{1}{2}\gamma \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

40. $\sin(\alpha - \beta) = 2F \,.\, (a^2 - b^2) : abc^2$.

41. $4F = (b\cos\gamma + c\cos\beta)(b\sin\gamma + c\sin\beta)$.

42. $4F = b^2 \,.\, \sin 2\gamma + c^2 \,.\, \sin 2\beta$.

43. $6F = b \,.\, \sin\gamma \,.\, (a + c \,.\, \cos\beta) + c \,.\, \sin\beta \,.\, (a + b \,.\, \cos\gamma)$.

44. $\sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s-c}{abc}\cdot F$;
$\cos\frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{s}{abc}\cdot F$.

45. $F^3 = \frac{1}{16}\,a^2b^2c^2 \,.\, (\sin\alpha^2\sin 2\beta + \sin\beta^2\sin 2\alpha)$.

46. $F = \frac{1}{4}(b + c)^2\cdot\dfrac{\sin\beta\sin\gamma\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2}$
$= \frac{1}{4}(b - c)^2\cdot\dfrac{\sin\beta\sin\gamma\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2}$.

47. $F = \frac{1}{4}(a + b + c)^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$
$= \frac{1}{4}(b + c - a)^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.

48. $F = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$
$= \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha.$

49. Ist in einem Dreieck $(a^3 + b^3 - c^3) : (a+b-c) = c^2$ und sin α . sin $\beta = \frac{3}{4}$, so ist dasselbe gleichseitig.

50. Es soll untersucht werden, ob es Dreiecke giebt, deren Winkel α, β, γ der goniometrischen Relation

$$\sin(\alpha - \beta)^2 + \sin(\beta - \gamma)^2 + \sin(\gamma - \alpha)^2 =$$
$$\cos(\alpha - \beta)^2 + \cos(\beta - \gamma)^2 + \cos(\gamma - \alpha)^2$$

genügen, und im Bejahungsfall soll ein bestimmtes Beispiel mit Probe aufgestellt werden.

51. Stehen die drei Seiten eines Dreiecks in harmonischer Progression, so ist $\frac{1}{2}$ sin β = sin α . sin γ : (sin α + sin γ).

52. Construirt man über der kleinsten Seite c eines Dreiecks ein demselben ähnliches zweites Dreieck, so dass c in diesem letzteren die grösste Seite wird, construirt man dann in entsprechender Weise über der kleinsten Seite des zweiten Dreiecks ein demselben ähnliches drittes, u. s. f., so ist die Summe der unendlich vielen Dreiecke, welche so entstanden gedacht werden können, gleich a^2 . sin α . sin γ : sin $(\alpha - \gamma)$.

53. Verhalten sich die Tangenten der Winkel eines Dreiecks zu einander, wie 1 : 2 : 3, so verhalten sich die Seiten desselben wie $\sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

§. 25b. Fundamentalaufgaben ohne Logarithmen.

Man vergleiche die Bemerkung am Anfang des Anhang 4.

Gegeben:

1. $b = 7{,}07107$; $\alpha = 30^0 0' 0''$; $\gamma = 105^0 0' 0''$.
2. $c = 9{,}562$; $\alpha = 45.0.0$; $\beta = 60.0.0$.
3. $c = 2{,}815$; $\gamma = 42.0.0$; $\beta = 120.0.0$.
4. $b = 2{,}57118$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 40^0$.

Gesucht:

$a = 5{,}00000$; $c = 9{,}65930$.
$a = 7{,}000$; $b = 8{,}573$.
$a = 1{,}300$; $b = 3{,}643$.
$a = 2{,}00000$; $c = 3{,}75876$.

Gegeben:	Gesucht:
5. $b=8$; $c=15$; $\alpha=60^0$.	$a=13$.
6. $a=24$; $b=35$; $\gamma=60^0$.	$c=31$.
7. $a=\sqrt{3}-1$; $b=\sqrt{2}$; $\gamma=135^0$.	$c=2$.
8. $b=3$; $c=2\sqrt{3}$; $\alpha=30^0$.	$\beta=60^0$, $\gamma=90^0$, $a=\sqrt{3}$.
9. $b=707{,}11$; $c=891{,}01$; $\alpha=18^0 0' 0''$.	$\beta=45^0$; $\gamma=117^0$; $a=309{,}02$.
10. $a=12$; $b=9\frac{39}{40}$; $\alpha=45^0$.	$\beta=36^0$; $\gamma=99^0$; $c=16{,}762$.
11. $a=1{,}00000$; $c=2{,}53211$; $\gamma=120^0 0' 0''$.	$\alpha=20^0$; $\beta=40^0$; $b=1{,}87938$.
12. $a=1{,}500$; $c=4{,}325$; $\alpha=18^0$.	$\beta=99^0$; $\gamma=63^0$, $b=4{,}794$.
	$\beta=45^0$; $\gamma=117^0$; $b=3{,}432$.
13. $a=13$; $b=8$; $c=15$.	$\alpha=60^0$.
14. $a=37$; $b=40$; $c=33$.	$\alpha=60^0$.
15. $a=2$; $b=1+\sqrt{3}$; $c=\sqrt{6}$.	$\alpha=45^0$; $\beta=75^0$; $\gamma=60^0$.
16. $a=2\sqrt{3}$; $b=3-\sqrt{3}$; $c=3\sqrt{2}$.	$\alpha=45^0$; $\beta=15^0$; $\gamma=120^0$.
17. $a=20$; $b=10+2\sqrt{75-30\sqrt{5}}$; $c=2\sqrt{150-30\sqrt{5}}$.	$\alpha=72^0$; $\beta=48^0$; $\gamma=60^0$.
18. $b=8$; $c=5$; $\alpha=60^0$.	$F=10\sqrt{3}=17{,}32051$.
19. $a=7$; $c=3$; $\alpha=60^0$.	$F=6\sqrt{3}=10{,}39230$.

20. In einem Dreieck sei ein Winkel gleich 20^0, ein anderer gleich 40^0. Wie verhalten sich die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten zu einander?

21. Die Winkel eines Dreiecks verhalten sich zu einander, wie $5:10:21$; die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite ist gleich 3. Man berechne die beiden anderen Seiten.

22. Die Entfernungen eines unzugänglichen Ortes C von den beiden Standpunkten A, B zu berechnen, wenn die Basis $AB=0{,}1$ Meile nebst den Winkeln $A=60^0\,20'$, $B=89^0\,30'$ gemessen ist.

23. Zwischen den Masszahlen der Seiten eines Dreiecks bestehen die Gleichungen:

$$c^2 + 4a^2 = 60; \quad c^2 - 4a^2 = 8b - b^2; \quad b^2 - 2a^2 = 2b.$$

Man berechne die Winkel dieses Dreiecks.

Alle vorkommenden Wurzeln sind positiv zu nehmen.

24. Zwischen den Masszahlen der Stücke eines Dreiecks bestehen die Gleichungen:

$$a \cos\beta = b \sin\alpha; \quad \alpha - \gamma = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta); \quad c = 1 + b \sin 18^0.$$

Man berechne die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks.

§. 26. Berechnung anderweiter Stücke des Dreiecks.

1. Von einem Dreieck sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises nebst den Winkeln α, β, γ bekannt; man berechne aus denselben

a) die Seiten a, b, c des Dreiecks,

b) die drei Höhen h_a, h_b, h_c und den Flächeninhalt F desselben,

c) die oberen (d. h. die den Eckpunkten anliegenden) Abschnitte der Höhen h_a', h_b', h_c',

d) die unteren Abschnitte der Höhen h_a'', h_b'', h_c'',

e) die durch die Höhen bestimmten Abschnitte der Seiten, $BA' = q_a$, $CA' = p_a$, $CB' = q_b$, $AB' = p_b$, $AC' = q_c$, $BC' = p_c$,

f) die Winkel α_1, β_1, γ_1 des durch die Fusspunkte der Höhen bestimmten Dreiecks (ohne trigonometrische Functionen und ohne r auszudrücken),

g) die Seiten $B'C' = a_1$, $A'C' = b_1$, $A'B' = c_1$ dieses Dreiecks,

h) den Flächeninhalt F_1 dieses Dreiecks,

i) den Radius r_1 des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Beispiel: $r = 22{,}1$, $\alpha = 95^0\, 27'\, 9'',4$, $\beta = 61^0\, 55'\, 39'',1$, $\gamma = 22^0\, 37'\, 11'',5$.

Folgerungen aus den allgemeinen Resultaten der vorstehenden Aufgabe:

1) $a : b = q_b : p_a$; $a : c = p_c : q_a$, u. s. w.

2) $h_a' \,.\, h_a'' = h_b' \,.\, h_b'' = h_c' \,.\, h_c''$.

3) $a \,.\, q_a = h_b \,.\, h_b'$; $b \,.\, q_b = h_c \,.\, h_c'$, u. s. w.

4) $p_a \,.\, q_a = h_a \; h_a''$; $p_b \,.\, q_b = h_b \,.\, h_b''$; $p_c \,.\, q_c = h_c \,.\, h_c''$.

5) $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2h_a \,.\, h_a'$, u. s. w.

6) $h_a \,.\, h_a' + h_b \,.\, h_b' + h_c \,.\, h_c' = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

7) $a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4r^2$.

8) $ab = 2rh_c;\; ac = 2rh_b;\; bc = 2rh_a$.

9) $F = 1:$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}.$$

10) $(h_a' \,.\, h_b' \,.\, h_c')^2 = h_a'' \,.\, h_b'' \,.\, h_c'' \,.\, (2r)^3$.

11) $h_a' \,.\, h_b' + h_a' \,.\, h_c' + h_b' \,.\, h_c' = 2r\,(h_a'' + h_b'' + h_c'')$.

12) $(a + b + c) \,.\, \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

13) $h_a \,.\, h_a'' = b_1 \,.\, c_1;\; h_b \,.\, h_b'' = a_1 \,.\, c_1;\; h_c \,.\, h_c'' = a_1 \,.\, b_1$.

14) $a \,.\, h_a' = 2r\, a_1;\; bh_b' = 2rb_1;\; ch_c' = 2rc_1$.

15) $a_1 b_1 c_1 = p_a p_b p_c = q_a q_b q_c$.

16) $(a_1 b_1 c_1)^2 = h_a h_b h_c \,.\, h_a'' h_b'' h_c''$.

17) $h_a h_b h_c = 2F \,.\, s_1;\; (2s_1 = a_1 + b_1 + c_1)$.

Ist $\triangle\, ABC$ stumpfwinkelig, so ist in s_1 das Glied negativ zu nehmen, welches die Fusspunkte der aus den spitzen Winkeln gefällten Höhen verbindet.

18) $h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = 2s \,.\, s_1$.

19) $\frac{h_a^2}{h_b h_c} + \frac{h_b^2}{h_a h_c} + \frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$.

20) $F = r\, s_1$.

21) $h_a' h_b' = 2r h_c''$.

22) $\frac{h_a' + h_b'}{h_a'' + h_b''} = \frac{h_a' - h_b'}{h_b'' - h_a''} = \frac{2r}{h_c'}$.

23) $4r^2 - (h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2) = 2h_a' h_a''$.

24) $2r \,.\, h_a'' h_b'' = h_c'^2 : h_c''$.

Anmerkung 1. Die Formeln 1)—24) sind als Lehrsätze zu betrachten und zu beweisen. Da dieselben die Functionen der Winkel nicht mehr enthalten, so haben sie den Charakter rein planimetrischer Lehren, welche hier als Beispiele der Anwendung der Trigonometrie zum Beweisen geometrischer Sätze dienen. Dass man daneben auch andere, ohne Benutzung der goniometrischen Functionen geführte Beweise suchen kann, ist selbstverständlich und es kann für eine ausgeführtere Bearbeitung der vorstehenden 24 Aufgaben die

Beifügung dieser rein geometrischen Beweise, z. B. für 1)—6) als nützliche Uebung gelten. Ausserdem können auch trigonometrische Sätze zwischen den angeführten Grössen aufgestellt werden, wie z. B. die folgenden:

25) $a + b = 4r \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

26) $a - b = 4r \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

27) $s = 4r \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma$.

28) $s - a = 4r \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$.

29) $p_a - q_a = 2r \sin(\beta - \gamma)$.

30) $a^2 + b^2 = c^2 + 4F \operatorname{cotg} \gamma = 2r^2(2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta)$
$= 4r^2[1 + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta)]$.

31) $a^2 - b^2 = 4r^2 \sin\gamma \sin(\alpha - \beta)$.

32) $a^2 + b^2 - c^2 = 8r^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$
$= 8r^2 \cos\gamma [\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2]$.

33) $ab = 2r^2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

34) $h_a + h_b = 8r \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$= 4r \cos \frac{1}{2}\gamma^2 (\cos\alpha + \cos\beta)$.

35) $h_a - h_b = 8r \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$
$= 4r \sin \frac{1}{2}\gamma^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$.

36) $h_a^2 - h_b^2 = 4r^2 \sin\gamma^3 \sin(\beta - \alpha)$.

37) $h_a' + h_b' + h_c' - 2r = 8r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$.

38) $s_1 = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

39) $s_1 = 4s \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$.

40) $h_a h_b h_c = \frac{a^2 b^2}{c} \sin\gamma^3$.

Anmerkung 2. Die vorstehende Aufgabe 1. kann selbstverständlich als Zusammenfassung einer grösseren Gruppe einzelner Aufgaben angesehen und bei dem Gebrauch im Unterricht in die letzteren zertheilt werden. Sie gestattet ferner noch sehr zahlreiche Abänderungen, indem man sie umkehrt, d. h. statt des Radius r und der Winkel irgend eine passende Combination von dreien der hier aus jenen berechneten Stücke als gegeben annimmt oder auch nur eins oder zwei der letzteren mit zwei oder einem der ersteren Stücke verbindet. Man löse dann die im Vorigen für die abgeleiteten Stücke, welche jetzt gegeben sind, entwickelten Formeln auf die nicht gegebenen jener drei r, α, β oder r, $\alpha - \beta$, γ u. s. w. auf und setze dann wieder die erhaltenen Werthe in die übrigen der vorher gefundenen Resultatformeln ein. Insbesondere können hiernach auch zu jeder der Fundamental-Aufgaben §. 20—23 die in der vorstehenden Aufgabe angegebenen weiteren Stücke aus den dort gegebenen berechnet werden. Aehnliches gilt für die folgenden Nummern dieses Paragraphen. Eine weitere Ausführung findet sich im nächsten Paragraphen.

2. Aus dem Radius r des umbeschriebenen Kreises und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks berechne man:

a) den Radius ϱ seines inneren Berührungskreises,

b) die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der bezüglich den Seiten a, b, c anbeschriebenen äusseren Berührungskreise;

c) die von den Berührungspunkten der in a) und b) genannten Kreise gebildeten Abschnitte der Seiten;

d) die Abstände des Mittelpunktes O des inneren von den Mittelpunkten O_a, O_b, O_c der äusseren Berührungskreise;

e) die Abstände der letzteren von einander.

Beispiel: $r = 51{,}7857$, $\alpha = 117^0 20' 33'',4$, $\beta = 46^0 23' 49'',9$, $\gamma = 16^0 15' 36'',7$.

Folgerungen:

1) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$.

2) $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$.

3) $\varrho\varrho_a + \varrho_b\varrho_c = bc$; $\varrho\varrho_b + \varrho_a\varrho_c = ac$; $\varrho\varrho_c + \varrho_a\varrho_b = ab$.

4) $\varrho\varrho_a + \varrho\varrho_b + \varrho\varrho_c + \varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = ab + ac + bc$.

5) $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$.

6) $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c - \varrho\varrho_a - \varrho\varrho_b - \varrho\varrho_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

7) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$.

8) $\varrho_a\varrho_b\varrho_c = s \,.\, F$.

9) $OO_a^2 + O_bO_c^2 = OO_b^2 + O_aO_c^2 = OO_c^2 + O_aO_b^2 = 16r^2$.

10) $OO_a \,.\, OO_b \,.\, OO_c = 16r^2\varrho$; $O_aO \,.\, O_aO_b \,.\, O_aO_c = 16r^2\varrho_a$.

11) $O_aO_b \,.\, O_aO_c \,.\, O_bO_c = 16r^2 s$.

12) $OO_a \,.\, O_bO_c = 4ar$.

13) $OO_a \,.\, O_bO_c : OO_b \,.\, O_aO_c = a : b$.

14) $OO_a : O_bO_c = \varrho : (s - a) = \varrho_a : s$.

15) $a^2 - b^2 = (\varrho_a - \varrho_b)(\varrho + \varrho_c)$.

16) $a^2 + b^2 - c^2 = \varrho_a\varrho_b - \varrho\varrho_c$.

17) $16r^2s^4 = (s^2 + \varrho_a^2)(s^2 + \varrho_b^2)(s^2 + \varrho_c^2)$.

18) $OO_a \,.\, O_aO_c + OO_b \,.\, O_bO_c = 4r \,.\, O_aO_b$;
$O_aO_c \,.\, O_bO_c - OO_a \,.\, OO_b = 4r \,.\, OO_c$.

Anmerkung. Siehe die Anmerkungen 1 und 2 zur vorigen Aufgabe.

3. Weitere Folgerungen aus No. 2 in Verbindung mit 1.

1) $\varrho_b\varrho_c - \varrho\,\varrho_a = h_a h_a'$ u. dgl. m.

2) $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c - \varrho\,\varrho_a - \varrho\,\varrho_b - \varrho\,\varrho_c =$
$h_a h_a' + h_b h_b' + h_c h_c'$.

3) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}$; $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{\varrho_a}$; u. s. w.

4) $h_a' + h_b' + h_c' = 2(\varrho + r)$; $h_b' + h_c' - h_a' = 2(\varrho_a - r)$.

5) $\frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$; 6) $\frac{s^2}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$.

7) $\frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{s^2}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}$.

8) $\frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{h_a h_b h_c} = \frac{\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{r}{2\varrho}$.

9) $h_a h_b h_c = \frac{(a+b+c)^3}{abc}\varrho^3$.

10) $\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 + \varrho^2 = 4r^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2$.

11) $s : s_1 = r : \varrho$.

12) $s : s_1 = 2\varrho_a\varrho_b\varrho_c : h_a h_b h_c = s^2 : 2\,(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)$
$= 2\,(\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c) : (h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)$.

13) $O_b O_c^2 - O O_a^2 = 8 r h_a'$.

Ausserdem: 14) $\varrho + \varrho_a = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$;
$\varrho_a + \varrho_b = 4r\cos\frac{1}{2}\gamma^2$, u. s. w.

15) $\varrho_a - \varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha^2$;
$\varrho_a - \varrho_b = 4r\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, u. s. w.

16) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 3)$.

17) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2r(\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\frac{1}{2}\beta^2 + \cos\frac{1}{2}\gamma^2)$.

18) $F = 4r\varrho\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$.

19) $r + \varrho = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

20) $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c) = \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha^2$;
$(\varrho + \varrho_a) : (\varrho_b - \varrho_c) = \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,\text{cotg}\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

21) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - 3\varrho = 4r(\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin\frac{1}{2}\beta^2 + \sin\frac{1}{2}\gamma^2)$.

22) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + 3\varrho = 4r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

23) $\varrho_a + \varrho_b = O_a O_b\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma$.

24) $\varrho_a - \varrho = O O_a\,.\,\sin\frac{1}{2}\alpha$.

25) $\varrho_a + h_a = 4r\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

26) $\varrho_a + \varrho_b = c \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma.$

27) $\frac{a-b}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma;\ \frac{a+b}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta);$

$\frac{a-b}{\varrho + \varrho_c} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta);\ \frac{a+b}{\varrho + \varrho_c} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma.$

28) $\varrho_c^2 \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c.$

29) $(s^2 + \varrho_a^2) \sin \alpha = 2\varrho_a s.$

Anmerkung wie vorher.

4. Von einem Dreieck sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises nebst den Winkeln α, β, γ gegeben; man berechne:

a) die von den winkelhalbirenden Transversalen auf den Seiten gebildeten Abschnitte $B\mathfrak{A} = v_a$, $\mathfrak{A}C = u_a$, $C\mathfrak{B} = v_b$, $\mathfrak{B}A = u_b$, u. s. w.;

b) die winkelhalbirenden Transversalen w_a, w_b, w_c selbst;

c) die oberen Abschnitte w_a', w_b', w_c' dieser Transversalen;

d) die unteren Abschnitte w_a'', w_b'', w_c'' derselben;

e) die Seiten a_2, b_2, c_2 und die Winkel α_2, β_2, γ_2 des durch die Fusspunkte dieser Transversalen bestimmten Dreiecks;

f) den Flächeninhalt F_2 dieses Dreiecks;

g) den Radius r_2 des demselben umbeschriebenen Kreises.

Beispiel: $r = 30{,}0333$, $\alpha = 59^0 57' 47'',7$, $\beta = 58^0 6' 33'',2$, $\gamma = 61^0 55' 39'',1$.

Folgerungen: 1) $v_a \,.\, v_b \,.\, v_c = u_a \,.\, u_b \,.\, u_c.$

2) $\frac{v_c}{v_b} : \frac{u_c}{u_b} = \frac{bc}{a^2}$ u. s. w. 3) $\frac{v_a\, v_b}{u_a u_b} = \frac{a}{b}$, u. s. w.

4) $w_a' : w_a'' = c : v_a;$ 5) $\frac{w_a' \,.\, w_b''}{w_b \,.\, w_a''} = \frac{b}{a};$

6) $a \,.\, w_c'' = u_c \,.\, w_c'.$

7) $(b+c)^2 \,.\, \frac{w_a^2}{bc} + (c+a)^2 \,.\, \frac{w_b^2}{ac} + (a+b)^2 \,.\, \frac{w_c^2}{ab}$
$= (a+b+c)^2.$

8) $w_a \sin \alpha \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = w_b \sin \beta \cos \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$
$= w_c \sin \gamma \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

9) $(a+b)^2 w_c^2 = ab\,(a+b+c)\,(a+b-c).$

Anmerkung wie vorher. Erweiterung der Aufgabe auf die Halbirungslinien der Aussenwinkel.

5. Aus dem Radius r des umbeschriebenen Kreises und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks zu berechnen:

die Mittellinien m_a, m_b, m_c desselben, d. h. die von den Eckpunkten nach den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gehenden Transversalen, ferner die oberen Abschnitte und die unteren Abschnitte derselben. Man kann noch hinzufügen:

die durch die Mittellinien entstehenden Theile der Dreieckswinkel, ferner die Seiten und die Winkel des durch die Fusspunkte der Mittellinien bestimmten Dreiecks nebst dem Flächeninhalt desselben.

Beispiel: $r = 290{,}9615$, $\alpha = 145^0 12' 48'',1$, $\beta = 25^0 59' 21'',2$, $\gamma = 8^0 47' 50'',7$.

Folgerungen: 1) $a^2 + b^2 = 2 m_c^2 + \frac{1}{2} c^2$.

2) $m_c^2 - \frac{1}{4} c^2 = \sqrt{a^2 b^2 - 4 F^2}$.

3) $4 m_c^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \cos \gamma$.

4) $4 m_c^2 - c^2 = 4 a b \cos \gamma$.

5) $(4 m_c^2 - c^2) \operatorname{tang} \gamma = 8 F$.

6) $(a + b)^2 \cos \gamma = 4 m_c^2 \cos \frac{1}{2} \gamma^2 - c^2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2$.

7) $(a - b)^2 \cos \gamma = c^2 \cos \frac{1}{2} \gamma^2 - 4 m_c^2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2$.

8) $3 (b^2 - c^2) = 4 (m_c^2 - m_b^2)$.

9) $3 (a^2 + b^2 + c^2) = 4 (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

10) $a^2 + c^2 = 4 (m_a^2 + m_c^2 - m_b^2)$.

11) Ist F der Inhalt eines Dreiecks, F_1 der Inhalt eines zweiten Dreiecks, dessen Seiten bezüglich gleich den Mittellinien des ersteren sind, so ist $F_1 = \frac{3}{4} F$.

6. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die Abstände der Mittelpunkte der vier Berührungskreise desselben von dem Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises zu berechnen. $a = 1{,}8$, $b = 1{,}4$, $c = 0{,}75$. — Es ist $MO^2 + MO_a^2 + MO_b^2 + MO_c^2 = 12 r^2$.

7. Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks die Länge derjenigen Transversale desselben zu berechnen, welche von einem Eckpunkt C ausgeht und die gegenüberliegende Seite c im Verhältniss $AD : DB = 1 : n$ theilt; ebenso die von dieser Transversale mit den anliegenden Seiten gebildeten Winkel. $a = 25$, $b = 26$, $c = 17$, $n = 0{,}7$.

8. Verbindet man die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise eines Dreiecks mit einander und beschreibt um das entstandene Dreieck einen Kreis, so ist der Radius desselben doppelt so gross, als der Radius des dem ursprünglichen Dreieck umbeschriebenen Kreises. Kann man ähnliche Sätze aufstellen über die Radien derjenigen Kreise, welche durch den Mittelpunkt des dem ursprünglichen Dreieck einbeschriebenen und durch je zwei Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise gehen?

9. Zieht man die drei Mittellinien eines Dreiecks und bezeichnet mit R_1, R_2, u. s. w. die Radien der um die entstandenen sechs Dreiecke beschriebenen, und mit r_1, r_2, ... die Radien der denselben einbeschriebenen Kreise, so ist

$$R_1 \,.\, R_3 \,.\, R_5 = R_2 \,.\, R_4 \,.\, R_6 \text{ und } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

10. Die Halbirungspunkte der zu den Seiten eines Dreiecks als Sehnen des umbeschriebenen Kreises gehörigen (kleineren) Bogen bestimmen ein zweites Dreieck; man berechne die Seiten und den Flächeninhalt des letzteren aus den bekannten Stücken des ersteren.

11. Zieht man die durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehenden Durchmesser des demselben umbeschriebenen Kreises, so bestimmen die anderen Endpunkte dieser Durchmesser ein zweites Dreieck. Man berechne die Winkel, die Seiten und den Flächeninhalt des letzteren.

12. Construirt man ein Dreieck, dessen Seiten die ungleichen Abschnitte der Seiten eines gegebenen Dreiecks sind, welche auf denselben durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises gebildet werden, so ist der Radius des dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises das geometrische Mittel aus dem Durchmesser des dem construirten umbeschriebenen und dem Radius des demselben einbeschriebenen Kreises.

13. Zu einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Gegenwinkeln α, β, γ derselben sei ein zweites Dreieck construirt, dessen Seiten bezüglich gleich $a \cos \alpha$, $b \cos \beta$, $c \cos \gamma$ sind. Man berechne die Winkel des letzteren Dreiecks aus den Winkeln des ersteren.

14. Ueber jeder Seite eines Dreiecks sei ein anderes Dreieck beschrieben, so dass der Gegenwinkel jener Seite gleich 90^0 minus

dem Gegenwinkel derselben im ursprünglichen Dreieck ist. Die Mittelpunkte der um die drei construirten Dreiecke beschriebenen Kreise bestimmen ein viertes Dreieck, dessen Seiten und Winkel aus Stücken des ursprünglichen berechnet werden sollen.

15. Halbirt man in einem Dreieck ABC den Winkel an einem Eckpunkt A durch die Transversale AD und den Aussenwinkel an demselben durch die Transversale AE, so kann man die Verhältnisse der Dreiecke $ABD : ADC : ABC : ACE$ durch Functionen von Winkeln des Dreiecks ABC ausdrücken. Man soll diese Berechnung ausführen.

16. Wenn drei sich in A, B, C schneidende gerade Linien AB, BC, CA von einer vierten geraden Linie bezüglich in C', A', B' geschnitten werden, so ist das Product der Flächenräume der drei Dreiecke $A'BC'$, $B'CA'$, $C'AB'$ stets gleich
$$\frac{(A'B'.B'C'.C'A'.\sin A'.\sin B'.\sin C')^2}{8\sin A.\sin B.\sin C}.$$

17. Zieht man durch einen Punkt O im Innern eines Dreiecks von jedem Eckpunkt desselben aus eine Transversale, so theilen diese Transversalen die Dreieckswinkel so, dass das Product der Sinus von drei an verschiedenen Eckpunkten und zugleich an verschiedenen Seiten liegenden dieser Theile gleich dem Product der Sinus der drei anderen ist. — Man kann den Beweis mit Hilfe von $\frac{AO.BO.CO}{CO.AO.BO} = 1$ führen, und dann durch den bewiesenen Satz weiterhin einen Beweis des bekannten geometrischen Satzes liefern, dass die Producte aus je drei nicht aneinander liegenden Seitenabschnitten gleiche Werthe haben. Giebt es entsprechende Sätze, wenn der Punkt O ausserhalb des gegebenen Dreiecks liegt?

18. Man beweise zu 17. auf trigonometrischem Wege noch die Gleichungen $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$; $\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 2$; $\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{BO}{OB'} \cdot \frac{CO}{OC'} = \frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} + 2$.

19. Zieht man von einem Eckpunkt O eines Dreiecks OAB innerhalb desselben eine Transversale OC und ausserhalb desselben eine Transversale OD, so theilen beide Linien die gegenüberliegende Dreieckseite so, dass (für $OA = a$, $OC = c$, $OB = b$, $OD = d$) $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}$.

(Gleichheit der Doppelverhältnisse bei vier von einer Geraden geschnittenen Strahlen eines ebenen Strahlensystems.)

§. 27. Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke aus Bestimmungsstücken, welche nicht sämmtlich Seiten oder Winkel derselben sind.

Vorbemerkung. In den nachfolgenden Nummern sind die gebräuchlichen, beziehungsweise die in den Aufgaben des §. 26 angegebenen Bezeichnungen gebraucht. Der Einfachheit halber soll jedoch, wenn bei den Buchstaben h, p, q, w, u, v, m der Index weggelassen ist, für denselben stets c angenommen werden, indem im Allgemeinen, sofern eine solche Annahme nöthig wird, C als Spitze, AB als Grundlinie und in zweifelhaften Fällen $a > b$ vorausgesetzt wird. Ist α ein stumpfer Winkel, so werden die Werthe von p_b und q_c, sowie diejenigen von h_b'', h_c'', h_a' als negativ betrachtet, so dass z. B. immer $c = p + q$ gesetzt werden kann.

Aus den unter den folgenden Nummern aufgeführten je drei Bestimmungsstücken sollen die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden. Die hier der Raumersparniss halber gewählte Form der Stellung der Aufgaben ist bei der Behandlung im Einzelnen durch eine ausgeführte Angabe in Worten zu ersetzen, wobei darauf zu achten ist, dass keine wesentliche Beziehung in der gegenseitigen Lage der gegebenen Stücke übergangen werde. So genügt z. B. in der Aufgabe $a - b = d$, c, α nicht die Angabe, dass das Dreieck aus der Differenz zweier Seiten, der dritten Seite und einem dieser letzteren anliegenden Winkel berechnet werden solle, sondern es muss bemerkt werden, dass der gegebene Winkel der grösseren der beiden anderen Seiten gegenüberliegen solle, da sonst die Aufgabe mit der zwar verwandten und ähnlich zu lösenden, aber doch verschiedenen Aufgabe $a - b$, c, β verwechselt werden könnte. Dagegen kann in $a + b$, c, α diese nähere Angabe unterbleiben, ebenso in $a + b + c$, α, β die genauere Bezeichnung der gegebenen Winkel, u. s. w.

Die nachstehenden Aufgaben sind eine mit Rücksicht auf die Zwecke des Unterrichts getroffene Auswahl aus der übergrossen Anzahl der überhaupt möglichen dieser Art. Es ist selbstverständlich sehr leicht, dieselben durch Bildung weiterer passender Combinationen aus den betreffenden Bestimmungsstücken zu je dreien bis in viele Tausende zu vermehren, wie auch solche weiterhin gebildete in die einzelnen nachstehenden Gruppen, bezw. nach den angegebenen Auflösungsmethoden zu ordnen.

Wir schicken eine Gruppe von Aufgaben voraus, welche strenggenommen nicht in diesen Abschnitt gehören, da sie sich durch bloss algebraische Operationen auf Fundamental-Aufgaben zurückführen lassen. Dieselben können zur Vorübung benutzt werden.

1. $b + c = s$, $b - c = d$, α; $s = 1226{,}68$, $d = 532{,}08$, $\alpha = 100^0$.

2. $a + b + c = 2s$, $a - b = d_1$, $b - c = d_2$; $2s = 17{,}233391$, $d_1 = 3{,}125409$, $d_2 = 0{,}320600$.

3. $\alpha - \beta = \delta, a, \gamma$; $\delta = 43^0\, 1'\, 36'',9$, $a = 541$, $\gamma = 50^0\, 55'\, 36'',1$.

4. $a : b = m : n$, $a + b = s, \gamma$; $m : n = 280 : 289$, $s = 1,96886$, $\gamma = 29^0$.

5. $ab = f^2$, $a^2 + b^2 = g^2, \gamma$; $f^2 = 2040$, $g^2 = 14689$, $\gamma = 61^0\, 55'\, 39'',1$.

6. $a - b = d$, $ab = f^2, \alpha$; $d = 19$, $f^2 = 53040$, $\alpha = 128^0\, 9'\, 0'',6$.

7. $a + b = s$, $a^2 + b^2 = g^2, \gamma$; $s = 163$, $g^2 = 13345$, $\gamma = 46^0\, 23'\, 49'',9$.

Aehnliche Aufgaben sind a) $b + c = s$, $b - c = d$, a; b) $a + b$, $b + c$, $a - b$; c) $\alpha - \beta, \gamma, b$; d) ab, $a^2 - b^2, \gamma$; e) $a - b$, $a^2 - b^2$, α.

Anleitung zur Auflösung der nachfolgenden Aufgaben.

1. Als Beispiel für die Behandlungsweise der nachstehenden Aufgaben dieses Paragraphen diene zunächst die folgende:

$a + b + c = 2s$, α, β, oder in Worten:

Aufgabe: Ein Dreieck aus dem Umfang $2s$ und zwei Winkeln α, β zu berechnen.

a. Geometrische Lösung.

Analysis: Verlängert man die Seite AB des Dreiecks ABC um $AD = AC$ und um $BE = BC$ und zieht CD und CE, so erhält man das Hilfsdreieck DEC, in welchem $DE = 2s$, $\sphericalangle DCE = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle DEC = \frac{1}{2}\beta$ bekannt sind. Durch Auflösung dieses Dreiecks erhält man die Werthe von CD und CE und hieraus mit Hilfe der gleichschenkeligen Dreiecke ACD, BCE die Werthe von $AC = b$ und $BC = a$*).

Berechnung: $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$;

$$CD = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}; \quad CE = \frac{2s \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$a = \frac{CE}{2\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}; \quad b = \frac{CD}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s \cdot \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

*) Wird der Rechnungs-Aufgabe die entsprechende Constructions-Aufgabe vorausgeschickt (was hier, als strenggenommen nicht hierher gehörig, unterblieben ist), so tritt die Analysis derselben an die Stelle der vorstehenden.

Probe: $a + b + c = 2s$.

$$F = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = s^2 . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Discussion: Durch die gegebenen Stücke ist, die Bedingung $\alpha + \beta < 180^0$ als selbstverständlich vorausgesetzt, stets ein und nur ein Dreieck bestimmt, wie sowohl aus der Construction desselben, als auch daraus hervorgeht, dass die für a, b und c gefundenen Ausdrücke stets eindeutig sind und reelle Werthe erhalten.

Zahlenbeispiel: $2s = 246{,}518$; $\alpha = 24^0\ 15'\ 12''$; $\beta = 121^0\ 44'\ 36''$.

		log	sin	cos	tang
$s = 123{,}259$		$\log s = 2{,}09082$			
$\frac{1}{2}\alpha = 12^0\ 7'\ 36''$		log	sin	cos	tang
$\frac{1}{2}\beta = 60.\ 52.\ 18$		$\frac{1}{2}\alpha$	9,32237	9,99020	9,33217
$\frac{1}{2}\gamma = 17.\ 0.\ 6$		$\frac{1}{2}\beta$	9,94128	9,68732	10,25396
		$\frac{1}{2}\gamma$	9,46598	9,98060	9,48538
$\log s^2 = 4{,}18164$			1,41319	— 9,66792 =	1,74527
9,07151			2,03210	9,97080	2,06130
$\log F = 3{,}25315$			1,55680	9,67752	1,87928

$a = 55{,}625$; $b = 115{,}160$; $c = 75{,}733$; $\gamma = 34^0\ 0'\ 12''$; $F = 1791{,}2$.

b. Algebraische Lösung.

Aus dem Sinussatz folgt

$$a : b : c : (a + b + c) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

und hieraus ergiebt sich ohne Weiteres

$$a = \frac{2s . \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

sowie die entsprechenden Formeln für b und c. Um die numerische Berechnung mit Logarithmen zu erleichtern, setze man

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2 \sin\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 2 \cos\tfrac{1}{2}\gamma \left[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] = 4 \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Drückt man noch in den Zählern die Sinus der ganzen durch Functionen der halben Winkel aus, so erhält man nach einigen leichten Umformungen

$$a = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma},\quad b = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\gamma},\quad c = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Man hat also hier dieselben Formeln, wie oben, gefunden. Daher bleibt alles Weitere unverändert wie vorher.

2. In dem vorstehenden Beispiel sind zwei verschiedene Methoden der Auflösung angewendet worden. Die erste derselben gründet sich darauf, dass jeder einzelnen Aufgabe dieser Art eine entsprechende rein geometrische zur Seite gestellt werden kann. Durch die in letzterer verlangte Construction des Dreiecks aus den gegebenen Bestimmungsstücken werden dieselben Grössen auf dem Wege der Zeichnung gefunden, welche bei der trigonometrischen Behandlung durch die Rechnung ermittelt werden sollen. In zahlreichen Fällen kann der Gang der Auflösung für die beiden coordinirten Aufgaben derselbe sein, und man wird daher die trigonometrische Auflösung finden können, indem man der vorausgeschickten Construction des Dreiecks folgt und nach einander die dort gezeichneten Hilfsgrössen entsprechend berechnet. Die zweite Methode nimmt dagegen keinen Bezug auf die Construction, sondern sucht zwischen den gesuchten und den gegebenen Grössen Beziehungsgleichungen in der erforderlichen Anzahl aus den bekannten Formeln der Trigonometrie und löst dann dieselben algebraisch auf die unbekannten Grössen auf. Zuweilen empfiehlt sich auch eine geeignete Verbindung beider Methoden.

Die geometrische Methode besitzt besondere Vorzüge in ihrer Anschaulichkeit, ihrer Verknüpfung mit einem wichtigen anderen Gebiete des mathematischen Unterrichts, und nicht selten in der reicheren Darbietung von Gelegenheit zur Uebung des Scharfsinnes, während die algebraische mehr mechanisch ist. Einer eingehenderen Anleitung zur Anwendung der ersteren bedarf es, die nöthige Uebung im Lösen von Constructions-Aufgaben vorausgesetzt, nicht, da die Zeichnung im einzelnen Fall diese Anleitung bietet. Doch eignet sich nicht jede Art der construirenden Lösungen von Aufgaben gleichgut zur Uebertragung in Rechnung; namentlich bieten diejenigen nicht selten Schwierigkeiten, welche geometrische Oerter benutzen.

Die algebraische Methode hat den Vorzug, dass sie in schwierigen Fällen oft leichter gelingt als die geometrische und deshalb sicherer und in kürzerer Frist zum Ziele führt. Man kann dieselbe auch benutzen, um umgekehrt aus den Resultaten der Rechnung auf eine Lösung der entsprechenden geometrischen Aufgabe durch Zeichnung zu schliessen. Von dieser trigonometrischen Analysis geometrischer Aufgaben, welche

es gestattet, den auf algebraischem Wege gelösten Aufgaben dieses Paragraphen die entsprechende Constructions-Aufgabe in analoger Weise anzuschliessen, wie sie den auf geometrischem Wege gelösten vorangeht, soll bei Gelegenheit des nachstehenden weiteren Beispiels eine Probe gegeben werden.

3. Es soll nämlich zu weiterer Erläuterung noch die Aufgabe

$a + b = s, \quad c, \quad \alpha - \beta = \delta, \quad (\alpha > \beta);$ oder die

Aufgabe: Ein Dreieck aus der Summe zweier Seiten, der Differenz der letzteren gegenüberliegenden Winkel und der dritten Seite zu berechnen,

nach den verschiedenen vorher angegebenen Richtungen vollständig behandelt werden.

a. Geometrische Methode.

1. Construction.

Analysis: Angenommen, es sei ABC das verlangte Dreieck, BC über C um $CD = CA$ verlängert, und D mit A verbunden, so ist BD gleich der gegebenen Summe s. Ferner ist $\sphericalangle CDA = DAC = \frac{1}{2} ACB = \frac{1}{2}\gamma$, also $\sphericalangle DAB = CAB + DAC = \alpha + \frac{1}{2}\gamma = \alpha + 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$. Da ausserdem $AB = c$ gegeben ist, so kann das Dreieck ADB aus zwei Seiten und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel construirt, und dann kann durch Anlegen des Winkels $DAC = CDA$ das Dreieck ABC gefunden werden.

Construction: Halbire die gegebene Differenz δ der Winkel und errichte auf der Halbirungslinie im Scheitelpunkt die Senkrechte, wodurch man einen Winkel gleich $90^0 + \frac{1}{2}\delta$ erhält. Trage auf einer beliebigen Geraden eine Strecke AB gleich der gegebenen Seite c ab, lege an AB in A einen Winkel gleich $90^0 + \frac{1}{2}\delta$ an, beschreibe um B mit der gegebenen Summe s als Radius einen Kreisbogen, welcher den in A angelegten Schenkel in D schneide, verbinde D mit B und lege in A einen Winkel $DAC = CDA$ an (oder errichte auf DA in ihrem Halbirungspunkt die Senkrechte), wodurch man auf BD einen Punkt C erhält. Das Dreieck ABC ist dann das verlangte.

Beweis: $\sphericalangle DAC = CDA$ n. Constr., daher $CA = CD$, also $CA + CB = BD$; $BD = s$ n. Constr., mithin $CA + CB = s$.

Ferner ist $\sphericalangle ACB = DAC + CDA$, daher $\sphericalangle DAB = \alpha + \frac{1}{2}\gamma$ $= \alpha + 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Da nun n. Constr. $\sphericalangle DAB = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$ ist, so ist $\alpha - \beta = \delta$. Endlich ist $AB = c$ n. Constr.

Determination: Da die Summe je zweier Seiten eines jeden Dreiecks grösser als die dritte Seite ist, so muss $s > c$ sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist stets ein Dreieck ABD, und nur ein solches construirbar. Hieraus geht hervor, dass die Aufgabe stets eine einzige Lösung hat. — Wenn $s < c$ wäre, so würde entweder (für $s < c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta$) der mit s um B beschriebene Kreis AD gar nicht treffen, oder es würden, falls derselbe mit AD einen oder zwei Punkte gemeinschaftlich hätte ($s \geqq c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta$), diese Punkte auf der Verlängerung von AD über A liegen, und der Punkt C fiele dann nicht auf BD, sondern auf deren Verlängerung; man würde dann also kein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck erhalten. Ist aber $s > c$, so erhält man zwar ebenfalls zwei Durchschnittspunkte, doch liegt nur der eine von ihnen auf AD selbst, während der andere auf die Verlängerung von AD über A fällt, und das aus ihm nach dem Wortlaut der Construction sich ergebende Dreieck dem anderen congruent wird.

2. Berechnung auf Grund der Construction.

Auflösung: Aus dem Dreieck ABD erhält man zunächst

$$\sin ADB = \frac{c \,.\, \sin(90^0 + \frac{1}{2}\delta)}{s} = \frac{c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta}{s},$$

und hieraus $\sphericalangle CAB = \alpha = 90^0 + \frac{1}{2}\delta - ADB$;

$\sphericalangle CBA = \beta = 180^0 - (90^0 + \frac{1}{2}\delta + ADB) = 90^0 - (\frac{1}{2}\delta + ADB)$.

Aus c und den Winkeln findet man durch den Sinussatz die Werthe von a und b und sodann den Flächeninhalt, und die Gleichung $a + b = s$ liefert zum Schluss eine Probe.

Oder, da $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so hat man $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta}{s}$. Aus $90^0 - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ergeben sich dann durch Addition, bezw. Subtraction die Winkel α und β. Ferner ist

$$DA = \sqrt{s^2 - c^2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\delta^2} - c \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\delta; \quad b \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}DA,$$

also

$$b = s \cdot \frac{\sqrt{s^2 - c^2 \cos \frac{1}{2}\delta^2} - c \sin \frac{1}{2}\delta}{2\sqrt{s^2 - c^2 \cos \frac{1}{2}\delta^2}} = \frac{1}{2} s \left\{ 1 - \frac{c \sin \frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2 \cos \frac{1}{2}\delta^2}} \right\};$$

endlich

$$a = s - b = \frac{1}{2} s \left\{ 1 + \frac{c \sin \frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2 \cos \frac{1}{2}\delta^2}} \right\}.$$

Discussion: Die vorstehenden Formeln zeigen in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, dass nicht nur $s \overline{>} c \cos \frac{1}{2}\delta$ sein muss, da anderen Falls die Wurzelgrösse imaginär, sowie auch $\sin \frac{1}{2}\gamma > 1$ sein würde, sondern dass nur für $s > c$ ein Dreieck möglich ist. Denn für $s = c$ würde man für b den Werth Null, und für $s < c$ sogar einen negativen Werth von b erhalten. — Wegen der Zweideutigkeit der Wurzelgrösse erhält man für a und b je zwei Werthe, welche jedoch wechselsweise einander gleich sind und demnach zwei congruenten Dreiecken angehören. Die Aufgabe ergiebt sich also auch hierdurch als eindeutig.

b. Algebraische Methode.

1. Berechnung.

Aus der ersten der beiden Mollweide'schen Formeln

$$(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

ergiebt sich $$s \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma = c \,.\, \cos \frac{1}{2}\delta,$$

also $$\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{c \,.\, \cos \frac{1}{2}\delta}{s}.$$

Aus $90^0 - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ergeben sich dann die Werthe von α und β. Es lassen sich nun die übrigen Seiten durch den Sinussatz berechnen. Man kann dieselben aber auch mittelst der zweiten der obigen Formeln finden, indem man aus derselben

$$a - b = \frac{c \,.\, \sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$$

bestimmt, und diese Gleichung mit der gegebenen $a + b = s$ durch Addition und Subtraction verbindet. In den Resultaten hat man dann, wenn a und b unmittelbar nur durch gegebene Stücke ausgedrückt werden sollen,

$$\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{1 - \frac{c^2 \cos \frac{1}{2}\delta^2}{s^2}}$$

zu setzen, wodurch man die schon oben gefundenen Formeln

erhält. Mit Hilfe derselben ergiebt sich die Discussion wie vorher.

2. Construction auf Grund der Berechnung.

Man halbire die gegebene Differenz δ der Winkel, trage auf der Halbirungslinie vom Scheitel E aus die Strecke EF gleich der gegebenen Seite c ab, fälle von F auf einen Schenkel des Winkels δ die Senkrechte FG, verlängere diese über G, beschreibe um E mit der gegebenen Summe s als Radius einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von FG in H schneide, verbinde H mit E und ziehe durch F zu GE die Parallele FK, welche die Verlängerung von EH in K treffe. Man trage dann noch $EL = EK$ von EH ab, halbire HK und HL und construire aus den Hälften und aus der gegebenen Seite c als Seiten ein Dreieck, so ist dieses das verlangte.

Beweis: In dem rechtwinkeligen Dreieck FGE ist n. Constr. $FE = c$, $\sphericalangle FEG = \frac{1}{2}\delta$, daher $FG = c \sin\frac{1}{2}\delta$, $GE = c\cos\frac{1}{2}\delta$. Da ferner nach Constr. $EH = s$ ist, so folgt

$$GH = \sqrt{s^2 - c^2\cos\tfrac{1}{2}\delta^2}.$$

Aus $GK \parallel FE$ ergiebt sich dann $EK : EH = FG : GH$, oder

$$EK = \frac{s \,.\, c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}, \text{ also } \tfrac{1}{2}HK = \tfrac{1}{2}s\left\{1 + \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\}$$

und

$$\tfrac{1}{2}HL = \tfrac{1}{2}s\left\{1 - \frac{c\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{s^2 - c^2\cos\frac{1}{2}\delta^2}}\right\}.$$

Aus den Resultaten der trigonometrischen Auflösung ergiebt sich, dass hiernach die Hälften von HK und HL bezüglich gleich den nicht gegebenen Seiten a, b des gesuchten Dreiecks sind, woraus dann die Richtigkeit der Construction hervorgeht.

c. Numerische Berechnung.

Zur Berechnung mittelst Logarithmen bedient man sich wohl am besten der Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta}{s}, \quad a - b = \frac{c \,.\, \sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}, \quad a + b = s.$$

Beispiel: $c = 101^m$, $s = 383^m$, $\delta = 7^0\,40'\,4'',2$.

Log			
$\sin \frac{1}{2}\delta$	8,82520	$\frac{1}{2}\gamma$	15° 15′ 18″,3
$\cos \frac{1}{2}\delta$	9,99903	γ	30. 30. 36,6
c	2,00432	$a-b$	7,00000
$c \cos \frac{1}{2}\delta$	2,00335	$a+b$	383
$c \sin \frac{1}{2}\delta$	0,82952	a	195
s	2,58320	b	188
$\sin \frac{1}{2}\gamma$	9,42015		
$\cos \frac{1}{2}\gamma$	9,98442		
$a-b$	0,84510		

4. Bei der algebraischen Methode wird man die nothwendigen Gleichungen zwischen einer oder mehreren der gesuchten Grössen als Unbekannten und den gegebenen Grössen zunächst unmittelbar aufzustellen suchen, wie auch in der vorstehenden Aufgabe an der betreffenden Stelle geschehen ist. Unter Umständen empfiehlt es sich jedoch, eine neue, vermittelnde Grösse einzuführen, durch welche die gesuchten und die gegebenen Stücke des Dreiecks mittelbar mit einander verbunden werden. Hierzu eignet sich namentlich der Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Im Nachstehenden soll noch eine kurze Anleitung zur Anwendung dieses besonderen, für die Mehrzahl aller hierher gehörigen Aufgaben anwendbaren Verfahrens gegeben werden.

Als Grundlage desselben dienen die Aufgaben 1—5 des §. 26, bezw. die in eine Tabelle zusammenzustellenden Resultate derselben. Wir theilen nun die nach dieser Weise zu lösenden Aufgaben, wie folgt, in Gruppen:

1. Gruppe: Die gegebenen Stücke sind zwei Winkel des Dreiecks nebst einer Strecke oder einer Grösse zweiter Dimension. Man drücke diese Strecke oder Fläche mittelst der Resultate aus §. 26 durch r und die Winkel aus, löse die entstandene Gleichung auf r als Unbekannte auf und setze den erhaltenen Werth in die entsprechenden Formeln aus §. 26 für die gesuchten Stücke ein.

Es sei z. B. der untere Abschnitt h_a'' der zur Seite a gehörigen Höhe nebst den Winkeln α, β, und somit auch γ bekannt, so hat man aus §. 26:

$$h_a'' = 2r \,.\, \cos\beta \cos\gamma,$$

also $2r = \frac{h_a''}{\cos\beta \cos\gamma}$, und somit aus $a = 2r.\sin\alpha$, $b = 2r.\sin\beta$, $c = 2r \,.\, \sin\gamma$:

$$a = \frac{h_a'' \sin\alpha}{\cos\beta \cos\gamma}, \quad b = \frac{h_a'' \operatorname{tang}\beta}{\cos\gamma}, \quad c = \frac{h_a'' \operatorname{tang}\gamma}{\cos\beta}.$$

2. Gruppe: Statt eines der Winkel in der vorigen Gruppe ist ein Verhältniss zweier Seiten oder Flächen gegeben. Man drücke beide Glieder des Verhältnisses nach §. 26 durch r und die Winkel aus. Nachdem die Grösse r in dem Verhältniss sich weggehoben hat, bleibt eine Gleichung zwischen den Winkeln übrig, welche mit dem gegebenen Winkel und der bekannten Winkelsumme verbunden wird, sodass man durch Auflösung der Gleichungen auf die beiden unbekannten Winkel diese letzteren finden kann. Die weitere Auflösung der Aufgabe kann dann wie bei der ersten Gruppe geschehen. Da mit dem einen Winkel auch die Summe der beiden anderen gegeben ist, so empfiehlt es sich in zahlreichen Fällen, zuerst die Differenz dieser letzteren zu suchen.

Es seien z. B. die Summe des Radius des der Seite a anbeschriebenen Berührungskreises und der zu dieser Seite senkrechten Höhe $\varrho_a + h_a = s$, der Winkel α und das Verhältniss der Radien der beiden anderen äusseren Berührungskreise $\varrho_b : \varrho_c = m : n$ gegeben, so hat man aus §. 26:

$$\varrho_b = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma; \quad \varrho_c = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

daher

$$\frac{m}{n} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{2\cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung auf $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{m-n}{m+n}\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

und sodann ergeben sich β und γ aus $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ und $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ in bekannter Weise. Die Gleichung

$$\varrho_a + h_a = 4r \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

liefert dann $2r$ und darauf mittelst $a = 2r \sin\alpha$ u. s. w. die Werthe der Seiten.

3. Gruppe: Werden beide Winkel der ersten Gruppe durch Verhältnisse ersetzt, so erhält man in gleicher Weise wie vorher durch jedes Verhältniss eine Gleichung zwischen den Winkeln. Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der Winkelsumme dienen nun zur Bestimmung der drei Winkel als der drei Unbekannten derselben. Gelingt die Auflösung, so ist die Aufgabe wieder auf eine solche der ersten Gruppe zurückgeführt.

Es sei beispielsweise $h_a' : h_a'' = m$, $\varrho_b : \varrho_c = n$ und F gegeben (vergl. wieder §. 26), so erhält man

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta \,.\, \cos\gamma}, \quad n = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Werthe von α und $\beta - \gamma = \delta$ durch folgende Entwickelung finden:

$$m = \frac{2\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma)} = \frac{2\cos\alpha}{\cos\delta - \cos\alpha};$$

$$\frac{m}{m+2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}{1 - 2\sin\frac{1}{2}\delta^2},$$

und

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Das Weitere ist leicht.

4. Gruppe: Es sind zwei Strecken, bezw. Flächen, nebst einem Winkel gegeben. Durch die beiden Strecken oder Flächen ist zugleich ihr Verhältniss, bei einer Strecke und einer Fläche das Verhältniss des Quadrats der ersteren zur letzteren bekannt, und man findet daher die Winkel, wie bei der zweiten Gruppe gezeigt wurde. Man hat dann die Wahl, welche der beiden gegebenen Strecken man mit den Winkeln verbinden will, um nach dem Verfahren bei der ersten Gruppe weiter zu rechnen.

So findet man z. B. zu F, ϱ und α:

$$\frac{F}{\varrho^2} = \frac{2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{16r^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\sin\frac{1}{2}\beta^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma};$$

$$\frac{F}{\varrho^2}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) + \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},$$

und hieraus

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\frac{F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha + \varrho^2}{F\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha - \varrho^2}.$$

Sind so die Winkel bestimmt, so kann die Rechnung entweder für F, α, β, γ oder für ϱ, α, β, γ nach dem Verfahren bei der ersten Gruppe weiter geführt werden.

Der hieran sich anschliessende Fall, in welchem der eine gegebene Winkel durch ein gegebenes Verhältniss ersetzt ist, wird keiner besonderen Besprechung bedürfen, da seine Behandlung sich aus dem Vorstehenden von selbst ergiebt.

5. **Gruppe**: Sind endlich drei Strecken, bezw. Grössen zweiter Dimension gegeben, so kann man aus ihnen zwei Verhältnisse bilden, mit Hilfe derselben die Winkel, wie bei der dritten Gruppe, zu bestimmen suchen und dann zuletzt unter den drei gegebenen Stücken eins auszuwählen, welches man mit den Winkeln verbindet, um das Verfahren bei der ersten Gruppe anzuwenden.

So kann man z. B. zu h_a, ϱ_a, F die Gleichungen

$$\frac{h_a}{\varrho_a} = \frac{2r \,.\, \sin\beta \sin\gamma}{4r \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\frac{h_a \cdot \varrho_a}{F} = \frac{2r\sin\beta\sin\gamma \,.\, 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

bilden. Aus denselben folgt

$$\frac{h_a \cdot \varrho_a}{F} \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{h_a}{\varrho_a}\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

woraus sich leicht

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho_a^2\, h_a}{F\,(h_a + 2\,\varrho_a)}$$

ergiebt. Die Fortsetzung der Berechnung bedarf nun keiner weiteren Erläuterung.

Anmerkung. Ist eine Relation zwischen Stücken erster oder zweiter Dimension als zu erfüllende Bedingung gegeben, so liefert dieselbe, indem man jedes Glied derselben durch r und die Winkel ausdrückt, in gleicher Weise, wie vorher bei einem gegebenen Verhältniss der Fall war, eine der Gleichungen für die Winkel. In der That ist in diesem Fall auch ein Verhältniss bekannt, wie z. B. die Bedingung, dass die Summe zweier Seiten gleich der Summe der dritten Seite und der zu dieser gehörigen Höhe, oder dass $a + b = c + h$ sein solle, mit der Angabe des Werthes des Verhältnisses $(a + b) : (c + h) = 1$ identisch

ist. — Ist eine Relation zwischen den Winkeln gegeben, z. B. $\alpha = 2\beta$, so dient dieselbe unmittelbar als eine der zur Bestimmung der Winkel nothwendigen Gleichungen.

A. Aufgaben, welche zur Einübung der geometrischen Methode empfohlen werden.

1. b, h, a; α) $h = 17$, $a = 36$, $b = 21$; β) $h = 8$, $a = 17$, $b = 10$.
2. b, h, β; $b = 533$, $h = 308$, $\beta = 76^0\ 18'\ 52''$.
3. b, h, p; $b = 485$, $h = 93$, $p = 1440$.
4. b, h, γ; $b = 565$, $h = 396$, $\gamma = 72^0\ 38'\ 34'',1$.
5. b, q, γ; $b = 445$, $q = 203$, $\gamma = 38^0\ 33'\ 43'',4$.
6. p, q, h; $p = 608$, $q = 100$, $h = 105$.
7. h, β, α; $h = 26$, $\beta = 51^0\ 19'\ 20''$, $\alpha = 67^0\ 38'\ 0''$.
8. p, q, α; $p = 4,5$, $q = 0,5$, $\alpha = 55^0\ 46'\ 16''$.
9. h und die Winkel γ_1, γ_2, in welche h den Winkel γ theilt; $h = 684$, $\gamma_1 = 83^0\ 38'\ 25'',2$, $\gamma_2 = 54^0\ 56'\ 55'',9$.
10. h, c, β; $c = 18$, $h = 16$, $\beta = 64^0\ 12'\ 18''$.
11. h, c, b, oder F, c, b; $h = 336$, $c = 904$, $b = 625$.

---

12. h_a, h_b, a, oder $h_a = 8$, $h_b = 9$, $F = 45$.
13. h_a, h_b, c; $c = 517,63$, $h_a = 193,91$, $h_b = 469,13$.
14. h_a, h_b, γ; $h_a = 87,5$, $h_b = 59,3$, $\gamma = 54^0\ 38'\ 20''$.
15. h_a, h_b, β; $h_a = 15,52000$, $h_b = 18,05953$, $\beta = 50^0\ 53'\ 44'',7$.

---

16. $a + b = s, h, \beta$; $s = 584$, $h = 51$, $\beta = 6^0\ 43'\ 58'',5$.
17. $a + b = s, h_b, \gamma$; $s = 551$, $h_b = 117$, $\gamma = 25^0\ 59'\ 21'',2$.
18. $a - b = d, h, \alpha$; $d = 1702$, $h = 105$, $\alpha = 50^0\ 2'\ 1'',6$.
19. $b + c = s, h, F$; $s = 901$, $h = 57$, $F = 20406$.

---

20. h, m, c; $h = 69,0$, $m = 274,8$, $c = 1052,0$.
21. h, m, b; $h = 165,00$, $m = 219,00$, $b = 377,92$.

22. h, w, γ; $h = 69{,}000$, $w = 69{,}258$, $\gamma = 160^0\, 9'\, 29'',1$.

23. h, w, a; $h = 195{,}000$, $w = 207{,}352$, $a = 291{,}000$.

Die Aufgaben 1—23 lassen sich durch alleinige Anwendung rechtwinkeliger Dreiecke leicht lösen, bezw. auf Fundamental-Fälle zurückführen. Aehnliche Aufgaben: a) a, b, p; b) b, p, β; c) b, p, q; d) h, q, β; e) h, p, γ; f) p, α, a; g) p, β, γ; h) h, γ, b; i) h, γ, q; k) h, γ, α; l) q, b, γ; m) p, q, γ_1; n) p, b, α; o) h_a, h_b, p_b; p) $a-b, h, \beta$; q) $c-b, h, \alpha$; r) $c-b, h, F$; s) h, m, β; t) h, w, p.

---

24. ϱ, α, β; a) $\varrho = 57869$, $\alpha = 40^0\, 36'\, 32''$, $\beta = 50^0\, 40'\, 30''$;
b) $\varrho = 250$, $\alpha = 50^0\, 12'\, 25''$, $\beta = 74^0\, 4'\, 40''$.

25. ϱ, α, h; $\varrho = 200{,}76$, $h = 525$, $\alpha = 31^0\, 17'\, 4'',2$.

26. ϱ, a, h; $\varrho = 153$, $a = 509$, $h = 459$.

27. ϱ_a, a, β; $\varrho_a = 273$, $a = 316$, $\beta = 56^0\, 36'\, 5'',4$.

28. ϱ_a, b, α; $\varrho_a = 2491\frac{2}{3}$, $b = 353$, $\alpha = 126^0\, 43'\, 0'',1$.

29. ϱ, c, α. 30. ϱ, q, α. 31. ϱ, h, p. 32. ϱ_a, b, γ.

33. ϱ_a, α, β.

Construction rechtwinkeliger Dreiecke als Bestandtheile des gesuchten mit Hilfe der Hälften von Dreieckswinkeln und des Radius als Kathete.

34. m, b, c; $m = 2{,}96613$, $b = 3{,}05379$, $c = 1{,}20808$.

35. m, c, β; $m = 146{,}99$, $c = 25{,}00$, $\beta = 96^0\, 43'\, 58'',5$.

36. w, b, γ; $w = 23{,}206$, $b = 40{,}355$, $\gamma = 52^0\, 9'$.

37. w, b, α; $w = 34$, $b = 93$, $\alpha = 14^0\, 15'\, 0'',1$.

38. u, a, β. 39. $w, v, \alpha - \beta$. 40. $v, b, \alpha - \beta$.

Das gesuchte Dreieck zerfällt durch Construction des gegebenen mittelbaren Stücks in zwei leicht auflösbare Dreiecke.

41. $p - q = d, a, \beta$; $d = 292$, $a = 389$, $\beta = 29^0\, 4'\, 8'',1$.

42. $p - q, a, b$. 43. $p - q, a, \alpha$. 44. $a, b, \alpha - \beta$.

45. $a, \alpha - \beta, p - q$. 46. $p - q, \alpha, \beta$.

Construction eines Hilfsdreiecks BCE mit den Seiten $p - q, a, b$ und den Winkeln $\alpha - \beta$, $180^0 - \alpha$, β.

47. $a + b = s, c, \gamma$; a) $s = 1928$, $c = 1916$, $\gamma = 165^0\, 14'\, 58'',9$;
b) $s = 21917$, $c = 18458{,}3$, $\gamma = 107^0$.

48. $a + b = s, \alpha, \gamma$; a) $s = 17$, $\alpha = 67^0\, 22'\, 48'',5$;
$\beta = 22^0\, 37'\, 11'',5$;
b) $s = 10$, $\alpha = 88^0\, 36'\, 42''$,
$\gamma = 42^0\, 18'\, 24''$.

49. $a + b = s, c, \alpha$; $s = 2{,}55572$, $c = 0{,}83910$, $\alpha = 50^0$.

50. $a + b = s, c, \alpha - \beta$; $s = 1134$, $c = 116$, $\alpha - \beta = 133^0\ 46'\ 54'',4$.

Verlängere BC um $CD = AC$. Berechne das Hilfsdreieck BDA.

51. $a - b = d, c, \gamma$; a) $d = 136{,}00$, $c = 319{,}97$, $\gamma = 42^0\ 32'\ 4''$;
b) $d = 37{,}962$, $c = 75{,}924$, $\gamma = 40^0$.

52. $a - b = d, c, \beta$; $d = 1$, $c = 3$, $\beta = 45^0$.

53. $a - b = d, c, \alpha$; $d = 142$, $c = 436$, $\alpha = 77^0 58' 55'',1$.

54. $a - b = d, \alpha, \beta$; $d = -15{,}37$, $\alpha = 41^0 18'$, $\beta = 67^0 40'$.

55. $a - b = d, c, \alpha - \beta$; $d = \frac{1}{2}$, $c = 2$, $\alpha - \beta = 10^0$.

Trage $CD = CA$ von CB ab oder verlängere CA um AD, sodass $CD = CB$ wird. Hilfsdreieck ABD.

56. $a + b = s$, $p - q = d$, $\alpha - \beta = \delta$; $s = 931$, $d = 399$, $\delta = 20^0\ 27'\ 28'',9$.

57. $a + b, p - q, \beta$. 58. $a + b, p - q, \gamma$.

Ist CD senkrecht zu AB, so mache DE auf DB gleich DA, verlängere BC um $CF = CA$. Hilfsdreieck BEF; $\sphericalangle BFE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $BEF = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$.

59. $a - b = d$, $p - q = f$, $\alpha - \beta = \delta$; $d = 35{,}1$, $f = 39{,}9$, $\delta = 25^0\ 25'\ 20'',1$.

60. $a - b, p - q, \beta$. 61. $a - b, p - q, \gamma$.

Bestimme D und E wie vorher und trage $CG = CA$ von CB ab. Hilfsdreieck BGE; $\sphericalangle BEG = \frac{1}{2}\gamma$, $EGB = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

62. u, v, α; $u = 445{,}6$, $v = 138{,}4$, $\alpha = 72^0\ 30'\ 27'',6$.

63. $u, v, \alpha - \beta$. 64. $u, v, a - b$. 65. $u, \beta, a - b$.

66. $u, \alpha, a - b$. 67. u, α, β.

Ist CD die winkelhalbirende Transversale, so trage $CE = CA$ von CB ab. Hilfsdreieck BED; $DE = v$, $\sphericalangle CED = \alpha$, $EDB = \alpha - \beta$.

68. $u - v, a - b, \alpha - \beta$. 69. $u - v, a - b, \beta$.

70. $u - v, a - b, \gamma$. 71. $u - v, \beta, \gamma$.

Mache dieselbe Construction wie vorher, trage dann $DF = DA = DE$ auf DB ab. Hilfsdreieck BEF; $\sphericalangle FEB = \frac{1}{2}\gamma$, $BFE = 90^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

72. m, $\sphericalangle (a, m) = \varphi$, $\sphericalangle (b, m) = \psi$;
a) $m = 97$, $\varphi = 50^0\ 45'\ 41''$, $\psi = 20^0\ 52'\ 27'',74$;
b) $m = 5$, $\varphi = 36^0\ 52'\ 11'',7$, $\psi = 53^0\ 7'\ 48'',3$.

73. m, a, b; $m = 364{,}308$, $a = 328{,}49$, $b = 534{,}85$.

74. a, $\sphericalangle(am)$, $\sphericalangle(bm)$. 75. a, m, $\sphericalangle(bm)$. 76. a, m, γ.

Es sei CD die Mittellinie, ziehe $DE \parallel CA$ bis zu BC. Hilfsdreieck CDE; $\sphericalangle EDC = (bm)$, $DE = \frac{1}{2} b$, $CE = \frac{1}{2} a$.

77. a, h_a, m. 78. a, h_a, $\sphericalangle(am)$. 79. m, h_a, h_b.

80. b, m, h_a. 81. m, h_a, γ.

Fällt man in der vorigen Figur DF senkrecht auf CB, DG senkrecht auf CA, so ist $DF = \frac{1}{2} h_a$, $DG = \frac{1}{2} h_b$.

82. m_a, m_b, $\sphericalangle(m_a, m_b) = \varphi$; $m_a = 3{,}39115$, $m_b = 2{,}78390$, $\varphi = 27^0\ 29'\ 10''$.

83. m_a, $\sphericalangle(m_a c)$, $\sphericalangle(m_b c)$. 84. m_a, m_b, c.

85. m_a, c, $\sphericalangle(m_b c)$. 86. m_c, $\sphericalangle(m_c c)$, $\sphericalangle(m_a c)$.

87. m_a, m_c, c. 88. m_a, m_c, $\sphericalangle(m_c, c)$.

89. $h = 77$, $\sphericalangle(m_c c) = \psi = 90^0$, $\sphericalangle(m_a, c) = \varepsilon = 35^0\ 29'\ 15'',6$.

Die drei Mittellinien theilen einander im Verhältniss 2 : 1.

90. $a + b - c = d, \alpha, \beta$. a) $d = 5$, $\alpha = 76^0$, $\beta = 54^0$; b) $d = 36{,}5$, $\alpha = 60^0\ 46'\ 12'',5$, $\beta = 51^0\ 18'\ 31'',4$.

91. $a + b + c = 2s, h, \alpha$; $2s = 100$, $h = 30$, $\alpha = 50^0$.

92. $a + b + c = 2s, q, \alpha$. 93. $b + c - a = d, h, \beta$.

Construire d, bezw. $2s$.

94. $h_a + h_c = s, b, \beta$; $s = 120{,}981$, $b = 65$, $\beta = 31^0\ 53'\ 26'',8$.

95. $h_a + h_c, c, \beta$. 96. $h_a + h_c, a, c$. 97. $h_a + h_c, \beta, a - c$.

98. $a + c, h_a, h_c$. 99. $a + c, h_a + h_c, b$.

100. $h_a + h_c, \alpha, \beta$. 101. $a + c, h_a + h_c, \alpha$.

Verlängert man CB um $BE = BA$, zieht durch E die Parallele zu BA und verlängert die Höhe CD bis zum Durchschnitt mit der Parallelen in G, so ist, wenn man BF senkrecht auf EG fällt, $\triangle BEF \cong ABH$ (wenn AH die Höhe auf BC ist), daher $CG = h_a + h_c$, und im rechtwinkeligen Hilfsdreieck CEG ausserdem $EC = a + c$, $\sphericalangle CEG = \beta$.

102. $h_c - h_a = d, \alpha, \gamma$; $d = 8{,}7508$, $\alpha = 154^0\ 56'\ 32'',6$, $\gamma = 18^0\ 41'\ 52'',6$.

103. $h_c - h_a = d, b, \beta$; $d = 22{,}2$, $b = 41$, $\beta = 36^0 52' 11'',6$.

104. $h_c - h_a = d$, $a + c = s, \beta$; $d = 359{,}7621$, $\beta = 87^0\ 55'\ 0'',3$; $s = 530$.

105. $h_c - h_a, c, \beta$. 106. $h_c - h_a, a, \beta$.

107. $h_c - h_a, a, c.$ 108. $a - c, h_c, h_a.$

109. $a - c, h_c - h_a, b.$ 110. $h_c - h_a, a - c, \alpha.$

Trage $BE = BA$ auf BC ab, ziehe die Höhe CD und EG parallel zu BA bis zu CD, so ist im Hilfsdreieck CEG, $CG = h_c - h_a$, $CE = a - c$, $\sphericalangle CEG = \beta$.

111. $\varrho_a - \varrho, a, \beta.$ 112. $\varrho_a - \varrho, a, b.$ 113. $\varrho_a - \varrho, \alpha, \beta.$

114. $OO_a, \alpha, \beta.$ 115. $OO_a, \alpha, b.$ 116. $OO_a, \varrho_a - \varrho, \beta.$

117. $OO_a, a, b.$ 118. $OO_a, a, \beta.$ 119. $OO_a, \varrho_a - \varrho, b.$

Ist $O_a D$ senkrecht zu AB und OE parallel zu AB bis zum Durchschnitt mit $O_a D$ gezogen, so ist im rechtwinkeligen Dreieck $O_a OE$, $O_a E = \varrho_a - \varrho$, $OE = a$, $\sphericalangle O_a OE = \frac{1}{2}\alpha$.

Zieht man entsprechend $O_b F \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit $O_a D$, so enthält das rechtwinkelige Dreieck $O_a O_b F$ die Seiten $O_a F = \varrho_a - \varrho_b$, $O_b F = a + b$ und den Winkel $O_a O_b F = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Zieht man ferner durch O die Parallele mit BC und fällt von O_a die Senkrechte $O_a G$ auf diese Parallele, so ist im Dreieck $OO_a G$, $O_a G = \varrho_a + \varrho$, $OG = b - c$, $\sphericalangle OO_a G = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Zieht man endlich durch O_b die Parallele zu AC und fällt auf dieselbe von O_a die Senkrechte $O_a H$, so ist im Dreieck $O_a O_b H$, $O_a H = \varrho_a + \varrho_b$, $O_b H = c$, $\sphericalangle O_b O_a H = \frac{1}{2}\gamma$. Hiernach können zu den Aufgaben 111—119 zahlreiche analoge gebildet werden.

B. Aufgaben, welche zur Einübung der algebraischen Methode ohne Anwendung eines vermittelnden Stücks (r) empfohlen werden.

1. r, α, β; a) $r = 1$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 80^0$;
   b) $r = 34$, $\alpha = 36^0\,25'$, $\beta = 51^0\,27'\,40''$.

2. r, a, β; $r = 358{,}65$, $a = 668{,}00$, $\beta = 17^0\,56'\,42'',9$.

3. h, r, b; $h = 1$, $r = 2\frac{1}{2}$, $b = 4$.

4. $b + c = s, r, \beta$; $s = 1256$, $\beta = 4^0\,34'\,52'',4$, $r = 1984{,}4$.

5. $b - c = d, r, \gamma$; $d = 242$, $\gamma = 4^0\,14'\,31'',9$, $r = 831{,}4$.

6. $r, a, \beta - \gamma = \delta$; $r = 2025{,}05$, $a = 597$, $\delta = 5^0\,41'\,47''$.

7. $r, a, b.$ 8. $b - c, r, \beta.$

Durch r und a ist α, durch r und α ist a bestimmt.

9. F, h_a, h_b; $F = 45$, $h_a = 8$, $h_b = 9$.

10. $F, p - q, h$; $F = 1680$, $p - q = 66$, $h = 40$.

11. $F, h, a.$ 12. $F, h, \beta.$ 13. $c : h, F, a.$

Durch F und h_c ist c bestimmt.

14. $h_a : h_b, a, \gamma.$ 15. $h_a : h_b, a, c.$ 16. $h_a : h_b : h_c, a.$

17. $a + b, h_a, h_b$; $a + b = 15{,}0771$, $h_a = 3{,}8893$, $h_b = 7{,}6603$.

18. $a - b, h_a, h_b$.

Durch $h_a : h_b$ ist $b : a$ gegeben.

19. $a : b = m : n$, α, c; $m : n = 0{,}735$, $c = 91{,}37$, $\alpha = 45^0\ 38'\ 51''$.

20. $a : b = m : n$, h, $\sin \alpha$; $m : n = 1 : 1{,}2$, $h = 5{,}5$, $\sin \alpha = 0{,}2345678$.

21. $a : b, \alpha, h$. 22. $h_a : h_b, \alpha, c$. 23. $h_a : h_b, \alpha, h_c$.

24. $h_a : h_b$, α, r.

Durch $a : b$ ist $\sin \alpha : \sin \beta$ gegeben.

---

25. $a, b, \alpha - \beta = \delta$; $a = 1{,}7320$, $b = 1{,}4142$, $\delta = 15^0$.

26. $a : b = m : n$, c, γ; $m : n = 40 : 17$, $c = 205$, $\gamma = 81^0\ 12'\ 9'',3$.

27. $a : b = m : n$, c, $\alpha - \beta = \delta$; $m : n = 17 : 10$, $c = 27$, $\delta = 98^0\ 47'\ 50'',7$.

28. $a : b = m : n$, c, r; $m : n = 5 : 4$, $c = 83$, $r = 45$.

29. $a - b = d$, $\alpha - \beta = \delta, \gamma$; $d = 13$, $\delta = 5^0\ 10'\ 36'',2$, $\gamma = 55^0\ 17'\ 31'',0$.

30. $a + b = s$, $\alpha - \beta = \delta, \gamma$; $s = 1309$, $\delta = 107^0\ 31'\ 59'',1$, $\gamma = 42^0\ 44'\ 28'',5$.

31. $a^2 - b^2 = f^2$, $\alpha - \beta = \delta, \gamma$; $f^2 = 117135$, $\delta = 31^0\ 35'\ 40'',2$, $\gamma = 82^0\ 50'\ 50'',4$.

32. $a : b = m : n$, $\alpha : \beta = m' : n'$, h; $m : n = 4161 : 2809$, $m' : n' = 3 : 2$, $h = 201{,}332$.

33. $a : b = m : n = 8 : 13$, $\alpha : \beta = 1 : 2$; gesucht α, β, γ, $c : a : b$.

34. $b + c = s$, r, α; $s = 50$, $r = 20{,}042$, $\alpha = 93^0\ 41'\ 42'',8$.

35. $b + c = s$, r, a; $s = 51{,}73$, $r = 19{,}36$, $a = 30{,}70$.

36. $a - b = d$, c, r; $d = 349$, $c = 365$, $r = 876{,}48$.

37. $a + b + c = 2s$, r, α; $2s = 250$, $r = 73{,}225$, $\alpha = 43^0\ 36'\ 10'',14$.

38. $a + b + c = 2s$, $c : b = v$, β; $2s = 810$, $v = 13 : 16$, $\beta = 148^0\ 34'\ 57'',8$.

39. $b - c, r, \alpha$. 40. $a + b - c, r, \alpha$.

41. $a + b - c, r, \gamma$.

Durch $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ und $\alpha - \beta = \delta$ oder $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ oder $\alpha : \beta$ sind die Winkel bestimmt. Tangentensatz. Mollweide'scher Doppelsatz.

42. $b^2 - c^2 = f^2, \beta, \gamma$; a) $f^2 = 50103$, $\beta = 85^0\, 11'\, 58'',6$, $\gamma = 15^0\, 11'\, 21'',4$;

b) $f^2 = 208$, $\beta = 61^0\, 55'\, 39'',1$, $\gamma = 58^0 6'\, 33'',2$.

43. $b^2 - c^2 = f^2, a, \alpha$; a) $f^2 = 2679$, $\alpha = 146^0\, 36'\, 5'',4$, $a = 109$; b) $f^2 = 12$, $a = 5$, $\alpha = 26^0\, 18',5$.

44. $b^2 - c^2 = f^2, a, \beta - \gamma = \delta$; $f^2 = 463443$, $a = 723$, $\delta = 36^0\, 16'\, 44'',2$.

Aus den Mollweide'schen Gleichungen folgt

$$(b^2 - c^2) \sin\alpha = a^2 \sin(\beta - \gamma).$$

45. $b^2 + c^2 = s^2 = 1769$, $a = 37$, $\alpha = 67^0\, 22'\, 48'',5$.

46. $b \,.\, c = p^2 = 43862$, $a = 409$, $\alpha = 150^0\, 8'\, 14''$.

47. $a^2 + b^2 + c^2 = q^2 = 110$, $bc = p^2 = 42$, $\alpha = 44^0\, 24'\, 54''$.

48. $a - b + c = d = 2514$, $bc = p^2 = 536775$, $\alpha = 164^0\, 14'\, 16'',2$.

49. $b + c - a = d = 300$, $bc = p^2 = 169647$, $\alpha = 73^0\, 55'\, 57'',2$.

50. $a + b + c = 2s = 107$, $bc = p^2 = 759,5$, $\alpha = 135^0\, 54'\, 32'',4$.

51. $b + c = s = 30$, $F = 50$, $\alpha = 28^0\, 37'\, 25''$.

52. $a - b = d = 353$, $\gamma = 6^0\, 1'\, 32'',1$, $F = 40926$.

53. $b^2 + c^2 = f^2 = 330514$, $\alpha = 166^0\, 8'\, 22'',9$, $F = 11946$.

54. $F = 84$, $a = 14$, $b^2 + c^2 = f^2 = 394$.

55. $F = 240$, $c : h = v = 10 : 3$, $a \,.\, b = p^2 = 481$.

56. $c = 9$, $h = 7,79423$, $a . b = p^2 = 81$.

57. F, c, γ, oder $h = 120$, $c = 90$, $\gamma = 15^0\, 22'\, 37''$.

58. $F = 172200$, $r = 430,63$, $a = 861$.

59. $a + b = s = 30$, $c = 10$, $F = 50$, oder $s = 610$, $c = 600$, $h = 44$.

60. $a + b + c = 2s = 3844$, $F = 411990$, $\alpha = 110^0\, 1'\, 59'',9$.

61. $b + c - a = 2d = 26$, $\alpha = 144^0 55' 47'',3$, $F = 26208$.

62. $a + b = s = 14$, $h = 6$, $\gamma = 59^0\ 29'\ 24''$.

63. $a - b = d = 144$, $h = 28$, $\gamma = 23^0\ 43'\ 10'',4$.

64. $a + b + c = 2s = 1962$, $h = 273$, $\gamma = 96^0\ 7'\ 48''$.

65. $h = 429$, $r = 601\frac{8}{9}$, $\gamma = 105^0\ 29'\ 41'',2$.

66. $a - c = d = 2$, $b = 724$, $h = 76$.

67. $h = 16$, $a = 34$, $b^2 + c^2 = f^2 = 5314$.

68. $h = 9$, $a = 41$, $c^2 - b^2 = d^2 = 559$.

69. $F = 36$, $a = 3$, $b^2 - c^2 = d^2 = 51$.

70. $a + b + c = 2s = 738$, $\gamma = 104^0\ 53'\ 51''$, $c - h = d = 208$.

71. $b + c = s = 1352$, $a + c = s' = 1631$, $\alpha = 61^0\ 21'\ 0'',3$.

72. $b + c = s = 1832$, $a + c = s' = 2831$, $\gamma = 54^0 41' 59'',1$.

73. $a + b + c = 2s = 2028$, $a - b = d = 191$, $\alpha = 123^0\ 18'\ 48'',4$.

74. $a + b + c = 2s = 2500$, $a - b = d = 423$, $\gamma = 80^0\ 3'\ 37'',9$.

75. $a + b + c = 2s = 1812$, $a - b = d = 59$, $\beta = 50^0\ 41'\ 32'',5$.

76. $b^2 + c^2 - a^2$, $b + c$, α.

77. $b + c$, a, F.

78. $b - c$, a, F.

79. $b - c$, F, α.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha = (b+c)^2 - 4bc \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = (b-c)^2 + 4bc \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b+c)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (b-c)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$
$$F = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}bc \sin\alpha.$$
$$b + c = \sqrt{a^2 + 4F \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha}, \quad b - c = \sqrt{a^2 - 4F \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Formeln für $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ aus den Seiten.

80. $b + c = s = 973$, $h = 195$, $a = 773$.

81. $b + c = s = 883$, $h = 231$, $\beta = 23^0\ 57'\ 8'',1$.

82. $\varrho = 4$, $b + c = s = 28$, $a = 14$.

83. $\varrho = 99$, $b + c = s = 728$, $\alpha = 57^0\ 5'\ 18'',6$.

84. $\varrho = 24$, $b - c = d = 1152$, $a = 1200$.

85. ϱ, $b - c$, β.

86. ϱ_a, $a + b$, c.

87. ϱ_a, $b + c$, α.

88. ϱ_b, $a + b$, α.

89. $\varrho = 336$, $h = 800$, $c = 1869$.

90. $\varrho = 216$, $h = 1200$, $\gamma = 24^0\ 57'\ 29'',3$.

91. $\varrho = 4$, $a + b + c = 2s = 42$, $\alpha = 53^0\ 7',8$.

92. $\varrho = 113\frac{1}{3}$, $\alpha = 126^0\ 36'\ 2'',3$, und der Abstand des Berührungspunktes auf a vom Eckpunkt C, $d = 544$.

93. ϱ, a, α; a) $\varrho = 1$, $a = 3,25$, $\alpha = 53^0\ 7',8$;
b) $\varrho = 115,5$, $a = 533,0$, $\alpha = 76^0\ 18'\ 52''$.

94. $\varrho_a = 76$, $a = 120$, $\alpha = 29^0\ 51'\ 46''$.

95. $\varrho_a = 1800$, $b = 1013$, $\beta = 58^0\ 6'\ 33'',2$.

96. $\varrho = 38\frac{5}{11}$, $a = 188$, $\beta = 78^0\ 34'\ 43'',7$.

97. $\varrho = 22\frac{2}{5}$, $r = 596,54$, $a = 1040,00$.

98. $\varrho = 38$, $r = 86$, $\alpha = 64^0\ 12'$.

99. $\varrho = 13\frac{3}{5}$, $\varrho_a = 42\frac{1}{2}$, $a = 51$.

100. $a + b = s = 3421$, $\varrho = 55\frac{14}{37}$, $\varrho_c = 222$.

101. $\varrho_a, a + b, c$. 102. $\varrho_a, b + c, \alpha$. 103. $\varrho_b, a + b, \alpha$.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S.(S-a)}} = \frac{\varrho}{S-a} = \frac{\varrho_a}{S} = \frac{S-c}{\varrho_b};$$
$$F = \varrho S = \varrho_a (S-a).$$

104. $m_a = 2\sqrt{37}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{505}$, $a = 14$.

105. $m_a = 1,5$, $a = 1,73205$, $b + c = s = 3,46410$.

106. $m_a = 99,619$, $a = 17,432$, $b - c = d = 0$.

107. $m_a = 0,86603$, $m_b = 0,86603$, $a^2 + c^2 = f^2 = 2$.

108. $m_a = \sqrt{13}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{73}$, $a^2 + b^2 = f^2 = 25$.

109. $m_a = 3,60550$, $m_b = 2,64575$, $m_c = 2,00000$.

110. $a = 32$, $b^2 + c^2 = f^2 = 5292,88$, $m_b = 28,1$.

111. $a = 185$, $b^2 - c^2 = d^2 = 9039$, $m_b = 153$.

112. $m_a = 308$, $a = 150$, $\alpha = 27^0\ 32'\ 16''$.

113. $h_a = 399,00$, $m_a = 452,76$, $\alpha = 55^0\ 16'\ 30'',3$.

114. $m_a = 29,723$, $a = 36,324$, $\sphericalangle(m_a h_a) = \varphi = 11^0 16' 28''$.

115. m_a, bc, α. 116. m_a, bc, a.

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \tfrac{1}{2}a^2;\ \tfrac{1}{4}a^2 = m_a^2 - bc\cos\alpha = m_a^2 - ah_a \operatorname{cotg}\alpha.$$

117. $a + b = s = 850$, $u = 223\frac{289}{425}$, $v = 592\frac{136}{425}$.

118. $u = 126,46$, $v = 569,54$, $\gamma = 120^0\ 10'\ 4'',9$.

119. $u = 445{,}6$, $v = 138{,}4$, $\beta = 72^0\ 30'\ 27'',6$.

120. $w = 684{,}10$, $a = 866{,}02$, $b = 788{,}01$.

121. $w = 17\frac{1}{2}$, $c = 48$, $a : b = m : n = 7 : 25$.

122. $w = 45$, $c = 56$, $\gamma = 63^0\ 46'\ 53'',6$.

123. $w = 440$, $a + b = s = 1042$, $\gamma = 64^0\ 45'\ 24'',6$.

124. $w = 285$, $a + b = s = 586$, $c = 136$.

125. $w = 39{,}803$, $h = 39$, $\gamma = 151^0\ 4'\ 23'',4$.

126. $w = 18{,}4087$, $h = 18$, $a : b = m : n = 41 : 15$.

127. $w = 20$, $u = 12$, $v = 8$.

$u : v = a : b$; $ab = uv + w^2$; $w = 2ab \cos\frac{1}{2}\gamma : (a + b)$;
$c^2 = (a + b)(a + b - 2w \cos\frac{1}{2}\gamma)$; $h : w = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

C. Aufgaben, welche zur Einübung der algebraischen Methode unter Vermittelung der Hilfsgrösse r empfohlen werden.

a. Gegeben seien zwei Winkel und ausserdem:

1. $ab = p^2$; $p^2 = 6222$; $\alpha = 66^0\ 59'\ 25'',4$; $\beta = 33^0\ 23'\ 54'',6$.

2. F; $F = 4740$; $\alpha = 136^0\ 23'\ 49'',9$; $\beta = 28^0\ 24'\ 48'',7$.

3. OO_a. 4. O_bO_c. 5. ϱ_c.
6. $\varrho_a + \varrho_b$. 7. $\varrho_a - \varrho_b$. 8. $a^2 - b^2$.
9. $a^2 + b^2 - c^2$. 10. h_a'. 11. h_a''.
12. a_1. 13. F_1. 14. s_1.
15. $h_a' + h_b'$. 16. $h_b' - h_a'$. 17. $h_a' + h_b''$.
18. $h_a'' + h_b''$. 19. $h_a'' - h_b''$. 20. $\varrho_c + h$.
21. u. 22. $\varrho + \varrho_a$. 23. $r + \varrho$.
24. $h_a' + h_b' + h_c'$. 25. $a^2 + b^2$. 26. $c + h$.
27. m. 28. $a + b + h$. 29. w'.
30. $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c$. 31. $h_a^2 - h_b^2$.
32. $(\varrho_a - \varrho) + (\varrho_b - \varrho) + (\varrho_c - \varrho)$.
33. $(\varrho_a + \varrho) + (\varrho_b + \varrho) + (\varrho_c + \varrho)$.
34. $OO_a \,.\, O_bO_c$. 35. $O_bO_c^2 - OO_a^2$.
36. $c - q_a = d = 80$, $\alpha = 43^0\ 1'\ 23'',5$, $\beta = 86^0\ 3'\ 0'',4$.
37. w; a) $w = 0{,}973$, $\beta = 63^0\ 18'$, $\gamma = 76^0\ 34'$;
b) $w = 734{,}3416$, $\beta = 57^0\ 15'\ 12''$, $\gamma = 46^0\ 48'\ 16''$.

b. Gegeben seien ein Winkel, ein Verhältniss und eine Strecke oder Fläche.

1. $a : h_a' = 24 : 7,\ \beta = 58^0\ 6'\ 33'',1,\ c = 329.$

2. $a : h_a',\ \beta,\ F.$ 3. $h_b'' : h_a',\ \alpha,\ b.$

4. $h_a' : h_c'',\ \alpha,\ b_1.$ 5. $(h_a + h_b) : (a + b),\ \alpha,\ \varrho.$

6. $OO_a : O_bO_c,\ \beta,\ c.$ 7. $OO_a : O_bO_c,\ \beta,\ \varrho + h_a.$

8. $(\varrho_a - \varrho) : OO_a,\ \beta,\ O_bO_c.$ 9. $(\varrho_a + \varrho_b) : O_aO_b,\ \beta,\ \varrho_a - \varrho.$

10. $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c),\ \beta,\ F.$ 11. $(\varrho_a - \varrho) : (\varrho_b + \varrho_c),\ \beta,\ r.$

12. $(\varrho_a + \varrho_b) : c,\ \alpha,\ r.$ 13. $\varrho : w,\ \alpha,\ m.$

---

14. $a : p_b,\ \gamma,\ c.$ 15. $h_a' : h_b',\ \beta,\ F.$

16. $\varrho : \varrho_a,\ b,\ \gamma.$ 17. $(h_b - h_a) : (a + b),\ \gamma,\ \varrho.$

18. $OO_a : OO_b,\ \beta,\ h.$ 19. $c : h,\ \gamma,\ \varrho_c.$

20. $h_a' : h_a,\ \alpha,\ F.$ 21. $a : h_b',\ \gamma,\ c.$

22. $\varrho : r,\ \gamma,\ h.$ 23. $\varrho_a : \varrho_b,\ \gamma,\ r + \varrho.$

24. $\varrho : \varrho_a,\ \alpha,\ O_bO_c.$

c. Gegeben seien zwei Verhältnisse und eine Strecke oder Fläche.

1. $p_c : a,\ p_b : h_a',\ w_a.$ 2. $a_1 : a,\ (h_b - h_a) : (a - b),\ \varrho_c.$

3. $(h_a' + h_b') : (a + b),\ h_c'' : q_c,\ F.$

4. $(h_a + h_b) : (a - b),\ (a + b) : (\varrho_a - \varrho_b),\ r.$

5. $(\varrho + \varrho_a) : (\varrho_b - \varrho_c),\ (b + c) : (\varrho + \varrho_a),\ h.$

---

6. $c : (a + b),\ r : \varrho,\ h.$ 7. $c : (a + b),\ r : \varrho_c,\ a - b.$

8. $c : (a + b),\ \varrho_a : \varrho_b,\ h_a + h_b.$ 9. $p : q,\ \varrho : h,\ a + b.$

10. $p : q,\ \varrho_c : h,\ a - b.$ 11. $p : q,\ \varrho : \varrho_c,\ a + b + c.$

12. $a : b,\ \varrho : h,\ r.$ 13. $a : b,\ \varrho : h,\ u - v.$

14. $a : b,\ c : h_c,\ h_a.$ 15. $a : b,\ c : h,\ p - q.$

16. $h_a : p_b,\ a : p_a,\ w_c.$

d. Gegeben ein Winkel und zwei Strecken oder Flächen.

1. $r,\ a^2 + b^2,\ \alpha.$ 2. $r,\ ab,\ \alpha.$ 3. $c,\ h_a + h_b,\ \alpha.$

4. $r,\ p - q,\ \alpha.$ 5. $r,\ p - q,\ \gamma.$ 6. $c,\ \varrho_a + \varrho_b,\ \alpha.$

7. $a + b + c,\ \varrho_c,\ \alpha.$ 8. $a + b,\ \varrho_c + \varrho,\ \alpha.$ 9. $a - b,\ \varrho_a - \varrho_b,\ \alpha.$

10. $h_a,\ \varrho_c - \varrho,\ \gamma.$ 11. $h_a,\ \varrho_a + \varrho_b,\ \beta.$ 12. $\varrho,\ \varrho_a,\ \gamma.$

13. $\varrho_a, \varrho_c, \gamma$.
14. $r, a+b, \alpha-\beta$. 15. $r, h_b - h_a, \gamma$. 16. $r, u-v, \gamma$.
17. r, a^2+b^2, γ. 18. $c, h_a+h_b, \alpha-\beta$. 19. $a+b, h_a+h_b, \alpha-\beta$.
20. $a+b, p-q, \gamma$. 21. w_c', w_c'', γ. 22. $r, \varrho_c-\varrho, \alpha-\beta$.
23. $r, \varrho_a-\varrho_b, \alpha-\beta$. 24. $r, \varrho_a-\varrho_b, \gamma$. 25. $a+b+c, \varrho_c, \alpha-\beta$.
26. $c, \varrho_c+\varrho, \gamma$. 27. $a+b, \varrho_c-\varrho, \gamma$. 28. $a+b, \varrho_a+\varrho_b, \alpha-\beta$.
29. $p-q, \varrho_a+\varrho_b, \gamma$.
30. $r, w, \alpha-\beta$. 31. r, ab, γ. 32. $r, h, \alpha-\beta$.
33. r, F, γ. 34. $h, \varrho_a+\varrho_b, \gamma$. 35. $F, \varrho_a+\varrho_b, \gamma$.
36. r, ϱ, γ. 37. $r, h-\varrho, \alpha-\beta$. 38. $a-b, \varrho, \alpha-\beta$.
39. $a-b, \varrho_c, \alpha-\beta$. 40. r, p, γ.
41. h_a', h_a'', β. 42. OO_a, OO_b, γ. 43. $a+b+c, \varrho_a+\varrho_b, \alpha$.
44. $a+b+c, \varrho_a+\varrho_b, \alpha-\beta$.
45. h_c, h_a+h_b, γ. 46. $a+b, \varrho_c, \gamma$.
47. $a-b, h+\varrho_c, \alpha-\beta$. 48. $a+b, h, \alpha-\beta$. 49. $a+b+c, h, \alpha-\beta$.
50. $h, a^2+b^2-c^2, \gamma$.
51. $r, \varrho, \alpha-\beta$. 52. $r, \varrho_c, \alpha-\beta$.
53. $r, \varrho_c+\varrho, \alpha$. 54. $c, \varrho_c-\varrho, \alpha$. 55. $a+b+c, \varrho_a-\varrho_b, \alpha$.
56. $a+b+c, h+\varrho_c, \gamma$. 57. $r, \varrho_a-\varrho_b, \alpha$. 58. $a-b, \varrho_a, \gamma$.
59. $h_a+h_b, \varrho_c, \alpha-\beta$. 60. $w, h+\varrho_c, \gamma$.

e. Gegeben ein Verhältniss und zwei Strecken oder Flächen.

1. $(b-c):(\varrho_b-\varrho_c), a+b, \varrho+\varrho_c$. 2. $(\varrho_a+\varrho_b): O_aO_b, a-b, \varrho+\varrho_c$.
3. $(h_b'-h_a'):(a-b), h_a, b_1$. 4. $(\varrho_a+\varrho_b): r, \varrho_a-\varrho, OO_a$.

---

5. $c:(a-b), h_a+h_b, p-q$. 6. $(a+b):(p-q), c, h_b-h_a$.
7. $(a-b):(p-q), h_b-h_a, u-v$.
8. $c:(a+b), r, u-v$. 9. $(u-v):(a-b), c, \varrho$.
10. $\varrho_c: h, c, h_b-h_a$. 11. $\varrho: h, h_b-h_a, p-q$.
12. $\varrho_c: \varrho, r, u-v$. 13. $\varrho_a:\varrho_b, h_b+h_a, p-q$.
14. $\varrho_a:\varrho_b, p, q$.
15. $\varrho_c: h, a+b, p-q$. 16. $\varrho_c:\varrho, c, a-b$.
17. $\varrho_a:\varrho_b, c, a+b$. 18. $a:b, p-q, u-v$.
19. $a:b, \varrho_a, \varrho_b$.

f. Gegeben drei Strecken oder Flächen.

1. $a+b, h_a+h_b, r$. 2. c, r, a^2-b^2. 3. $a+b, \varrho_c+\varrho, \varrho_a+\varrho_b$.
4. $a-b, \varrho_c+\varrho, r$. 5. h_a, u, v. 6. $p-q, r, \varrho_a+\varrho_b$.
7. r, w, ab. 8. $p-q, r, ab$. 9. $F, a^2+b^2-c^2, h$.
10. $\varrho_c, a+b+c, h$. 11. $\varrho, s-c, \varrho_a+\varrho_b$. 12. $\varrho_a, a+b-c, F$.
13. $a+b, h_a+h_b, F$. 14. a, p, u. 15. $a^2+b^2-c^2, ab, w$.
16. $c, r, h-\varrho$. 17. r, h, ϱ. 18. $u-v, \varrho_c-\varrho, a+b$.
19. $p-q, r, \varrho$. 20. $r, a+b, h$. 21. r, a^2+b^2, h.
22. $c, a+b, F$. 23. u, v, a^2-b^2. 24. $a+b, p-q, u-v$.
25. h_a, h_b, h_c. 26. c, F, ϱ_c. 27. $c, F, \varrho_c+\varrho$.
28. $h, w, a+b+c$. 29. c, ϱ, ϱ_a. 30. $a-b, h_b-h_a, \varrho_c$.
31. $\varrho, \varrho_a, \varrho_b$. (Berechne $\varrho_a-\varrho$, $\varrho_b-\varrho$, $\varrho : \sin\frac{1}{2}\gamma$).
32. $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ (analog 31).
33. $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c+\varrho$. 34. h, F, ϱ. 35. h, ϱ, ϱ_a.

g. Aufgaben, in welchen eine oder mehrere Bedingungen gestellt sind.

1. Gegeben: a, h. Es soll $\alpha = 2\beta$ sein.
2. F, ab. Bedingung: $\alpha = 2\beta$.
3. u, v. Bedingung: $\alpha = 3\beta$.
4. m. Bedingungen: $F = \varrho \, . \, \varrho_a$, $\beta = 2\gamma$.
5. γ, r. Bedingung: $\varrho_a + \varrho_b = \varrho + \varrho_c$.
6. Die Radien $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ sollen eine arithmetische Reihe bilden, und $\alpha - \gamma$ soll gleich 2β sein. Gegeben b.
7. Die Winkel α, β, γ sollen eine arithmetische Reihe bilden, und der Inhalt des Dreiecks soll doppelt so gross sein, als der Inhalt des Dreiecks seiner Höhen-Fusspunkte. Gegeben h.
8. c, h. Bedingung: $ab = 2uv$.
9. c, γ. Bedingung: $a^2 = c^2 + 3b^2$.

D. Aufgaben, welche auf Gleichungen höherer Grade führen.

1. $r, a+b, b+c$, oder $r, a-b, b-c$.
2. $a+b, h_a, r$. 3. $h_a, a+b+c, r$. 4. $\alpha-\beta, a+c, r$.
5. h_a, h_b, r. 6. $\alpha-\beta, h_b, r$. 7. $F, a+b, r$.
8. $F, \alpha-\beta, r$. 9. $r, \varrho, a+b$. 10. a, b, ϱ.
11. $\alpha-\beta, a, c$.

Was ist über die Fälle zu bemerken, in denen gegeben sind: 1. h_a, b, γ; 2. r, a, α; 3. $a:b, \alpha, \beta$?

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	F	h_a	h_b	h_c	r
1.	13	15	14	53° 7′ 48″,4	67° 22′ 48″,5	59° 29′ 23″,1	84	12,9231	11,2000	12	8,1250
2.	145	25	150	73. 44. 23,3	9. 31. 38,2	96. 43. 58,5	1800	24,8276	144,0000	24	75,5208
3.	101	29	120	43. 36. 10,1	11. 25. 16,3	124. 58. 33,6	1200	23,7624	82,7586	20	73,2250
4.	401	41	408	77. 19. 10,6	5. 43. 29,3	96. 57. 20,1	8160	40,6983	398,0488	40	205,5125
5.	37	13	40	67. 22. 48,5	18. 55. 28,7	93. 41. 42,8	240	12,9730	36,9231	12	20,0417
6.	37	15	44	53. 7. 48,4	18. 55. 28,7	107. 56. 42,9	264	14,2703	35,2000	12	23,1250
7.	109	61	102	79. 36. 40,0	33. 23. 54,6	66. 59. 25,4	3060	56,1468	100,3279	60	55,4083
8.	229	61	282	79. 36. 40,0	15. 11. 21,4	85. 11. 58,6	6960	60,7860	228,1967	60	116,4083
9.	229	109	312	33. 23. 54,6	15. 11. 21,4	131. 24. 44,0	9360	81,7467	171,7431	60	208,0083
10.	197	53	240	31. 53. 26,9	8. 10. 16,4	139. 56. 16,7	3360	34,1117	126,7925	28	186,4464
11.	205	85	200	81. 12. 9,3	24. 11. 22,3	74. 36. 28,4	8400	81,9512	197,6471	84	103,7202
12.	68	75	77	53. 7. 48,4	61. 55. 39,1	64. 56. 32,5	2310	67,9412	61,6000	60	42,5000
13.	68	65	57	67. 22. 48,5	61. 55. 39,1	50. 41. 32,4	1710	50,2941	52,6154	60	36,8333
14.	25	26	17	67. 22. 48,5	73. 44. 23,3	38. 52. 48,2	204	16,3200	15,6923	24	13,5417
15.	125	136	99	61. 55. 39,1	73. 44. 23,3	44. 19. 57,6	5940	95,0400	87,3529	120	70,8333
16.	116	105	143	53. 7. 48,4	46. 23. 49,9	80. 28. 21,7	6006	103,5517	114,4000	84	72,5000
17.	116	91	115	67. 22. 48,5	46. 23. 49,9	66. 13. 21,6	4830	83,2759	106,1538	84	62,8333
18.	145	119	156	61. 55. 39,1	46. 23. 49,9	71. 40. 31,0	8190	112,9655	137,6471	105	82,1667
19.	232	175	209	73. 44. 23,3	46. 23. 49,9	59. 51. 46,8	17556	151,6897	200,6400	168	120,8333
20.	148	175	153	53. 7. 48,4	71. 4. 31,3	55. 47. 40,3	10710	144,7297	122,4000	140	92,5000

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

(Fortsetzung von Seite 161.)

Nr.	p_a	p_b	p_c	q_a	q_b	q_c	s	$s-a$	$s-b$	$s-c$	ϱ	ϱ_a	ϱ_b
1.	7,6154	8,4000	5	5,3846	6,6000	9	21	8	6	7	4	10,5	14
2.	— 2,9310	42,0000	143	147,9310	— 17,0000	7	160	15	135	10	11,25	120	13,3333
3.	— 16,6238	86,8966	99	117,6238	— 57,8966	21	125	24	96	5	9,6	50	12,5
4.	— 4,9651	89,5610	399	405,9651	— 48,5610	9	425	24	384	17	19,2	340	21,25
5.	— 0,8378	15,3846	35	37,8378	— 2,3846	5	45	8	32	5	5,3333	30	7,5
6.	— 4,6216	26,4000	35	41,6216	— 11,4000	9	48	11	33	4	5,5	24	8
7.	23,8440	18,3934	91	85,1560	42,6066	11	136	27	75	34	22,5	113,3333	40,8
8.	5,1048	41,8361	221	223,8952	19,1639	11	261	32	200	29	26,6667	217,5	34,8
9.	— 72,1000	260,4771	221	301,1000	— 151,4771	91	325	96	216	13	28,8	97,5	43,3333
10.	— 40,5635	203,7737	195	237,5635	— 150,7737	45	245	48	192	5	13,7143	70	17,5
11.	22,5610	30,5882	187	182,4390	54,4118	13	245	40	160	45	34,2857	210	52,5
12.	31,7650	46,2000	32	36,2350	28,8000	45	110	42	35	33	21	55	66
13.	41,1765	21,9231	32	26,8235	43,0769	25	95	27	30	38	18	63,3333	57
14.	20,2400	6,5385	7	4,7600	19,4615	10	34	9	8	17	6	22,6667	25,5
15.	97,2800	46,5882	35	27,7200	89,4118	64	180	55	44	81	33	108	135
16.	17,3793	85,8000	80	98,6207	19,2000	63	182	66	77	39	33	91	78
17.	36,6900	44,2308	80	79,3100	46,7692	35	161	45	70	46	30	107,3333	69
18.	37,4138	73,4118	100	107,5862	45,5882	56	210	65	91	54	39	126	90
19.	87,8621	58,5200	160	144,1379	116,4800	49	308	76	133	99	57	231	132
20.	98,3783	91,8000	48	49,6217	83,2000	105	238	90	63	85	45	119	170

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

(Fortsetzung von Seite 162.)

Nr.	ϱ_c	h_a'	h_a''	h_b'	h_b''	h_c'	h_c''	v_c	u_c
1.	12	9,7500	3,1731	6,2500	4,9500	8,2500	3,7500	7,5000	6,5000
2.	180	42,2917	— 17,4641	148,9583	— 4,9583	— 17,7083	41,7083	22,0588	127,9412
3.	240	106,0500	— 82,2876	143,5500	— 60,7914	— 85,9500	105,9500	26,7692	93,2308
4.	480	90,2250	— 49,5267	408,9750	— 10,9262	— 49,7750	89,7750	37,8462	370,1538
5.	48	15,4167	— 2,4437	37,9167	— 0,9936	— 2,5833	14,5833	10,4000	29,6000
6.	66	27,7500	— 13,4797	43,7500	— 8,5500	— 14,2500	26,2500	12,6923	31,3077
7.	90	19,9833	36,1635	92,5167	7,8112	43,3167	16,6833	36,6000	65,4000
8.	240	41,9833	18,8027	224,6833	3,5133	19,4833	40,5167	48,8000	183,2000
9.	720	347,3167	— 265,5700	401,4833	— 229,7402	— 275,1833	335,1833	100,6154	211,3846
10.	672	316,6071	— 282,4954	369,1071	— 242,3146	— 285,3929	313,3929	50,8800	189,1200
11.	186,6667	31,7262	50,2250	189,2262	8,4209	55,0595	28,9405		
12.	70	51,0000	16,9412	40,0000	21,6000	36,0000	24,0000		
13.	45	28,3333	21,9608	34,6667	17,9487	46,6667	13,3333		
14.	12	10,4167	5,9033	7,5833	8,1090	21,0833	2,9167		
15.	73,3333	66,6667	28,3733	39,6667	47,6862	101,3333	18,6667		
16.	154	87,0000	16,5517	100,0000	4,4000	24,0000	60,0000		
17.	105	48,3333	34,9426	86,6667	19,4871	50,6667	33,3333		
18.	151,6667	77,3333	35,6322	113,3333	24,3138	51,6667	53,3333		
19.	177,3333	67,6667	84,0230	166,6667	33,9733	121,3333	46,6667		
20.	126	111,0000	33,7297	60,0000	62,4000	104,0000	36,0000		

E. Tafel schiefwinkeliger Dreiecke zu §. 27.

Nr.	w_a	w_b	w_c	m_a	m_b	m_c
1.	12,9538	11,2173	12,0934	12,9711	11,2361	12,1655
2.	34,2857	146,9483	28,3332	79,4119	146,9906	72,1110
3.	43,3705	109,1389	20,8155	71,2057	109,9557	43,8292
4.	58,1843	403,9651	49,3163	209,4570	403,9954	199,0603
5.	16,3270	37,9185	13,1590	23,2863	37,9770	19,2094
6.	20,0109	39,6506	12,5552	27,1708	39,9531	17,6918
7.	58,6487	100,9395	65,2331	63,9707	101,0557	72,1110
8.	74,2107	228,4683	70,9143	125,1489	228,4781	120,9339
9.	154,7447	261,8160	60,7656	203,7210	268,1832	88,4590
10.	83,4852	215,8346	28,6107	143,1860	217,9501	80,0562
	OO_a	OO_b	OO_c	$O_b O_c$	$O_a O_c$	$O_a O_b$
11.	270,0010	86,9296	251,4358	315,0010	405,6715	330,0095
12.	76,0263	87,4643	91,2688	152,0526	145,7738	143,4224
13.	81,7258	75,8024	63,0714	122,5887	126,3373	133,1507
14.	30,0463	32,5000	18,0278	45,0694	43,3333	51,0786
15.	145,7738	170,0000	106,9008	242,9564	226,6667	262,3928
16.	129,6919	114,2366	187,3232	259,3839	266,5521	221,3820
17.	139,4146	99,0050	137,2953	209,1220	231,0118	210,5195
18.	169,0976	129,4681	192,4312	281,8294	302,0923	266,4432
19.	290,0000	190,3943	241,1661	386,6667	444,2534	418,8675
20.	165,4690	215,0581	173,1185	330,9381	301,0814	327,0015

---

§. 28. Eingekleidete Aufgaben.

a. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

α) Bestimmung horizontaler Entfernungen.

1. a) Um die Entfernung zweier Punkte A, B zu bestimmen, zu denen man nicht gelangen kann, ist eine Basis $CD = a$ nebst den Winkeln $ACD = \gamma$, $BCD = \alpha$, $ADC = \beta$, $BDC = \delta$ gemessen worden. Man berechne AB auf zwei Arten und gebe eine zur Probe dienende Gleichung an. Die Basis CD soll AB nicht schneiden. $a = 2000$, $\alpha = 52^0 40'$, $\beta = 57^0\ 1'$, $\gamma = 96^0 40'$, $\delta = 87^0\ 15'$.

b) Zur Bestimmung des Abstandes AB der Strom-Pfeiler der neuen Coblenzer Brücke wurde auf dem linken Flussufer

eine Standlinie $CD = 103{,}142$ Ruthen nebst den Winkeln $ACD = 27^0\,52'\,53''$, $BCD = 45^0\,21'\,35''$, $CDA = 37^0\,30'\,52''$, $CDB = 53^0\,48'\,36'',5$ gemessen. Man soll jenen Abstand berechnen. (Der Strompfeiler am linken Ufer ist A.)

2. Die Entfernung zweier Punkte A, B soll aus folgenden Angaben berechnet werden: Eine Standlinie CD, deren Endpunkte zu verschiedenen Seiten von AB liegen, und welche die letztere Linie zwischen A und B schneidet, ist gleich a gemessen; ausserdem sind die Winkel $BCD = \alpha$, $BDC = \beta$, $ACD = \gamma$, $ADC = \delta$ bekannt. $a = 350$, $\alpha = 24^0\,16'\,23''$, $\beta = 39^0\,42'\,11''$, $\gamma = 20^0$, $\delta = 91^0\,56'\,24''$.

3. a) Unmittelbar an dem einen Ufer eines Flusses wurde längs desselben eine Standlinie $AB = a$ gemessen, und an den Endpunkten derselben wurden die Winkel der Standlinie gegen die Gesichtslinien nach einem am jenseitigen Ufer stehenden Pfahl C, $CAB = \beta$, $ABC = \gamma$ bestimmt. Wie breit war der Fluss an dieser Stelle? $a = 412$, $\beta = 68^0\,4'\,13''$, $\gamma = 71^0\,13'\,10''$.

b) Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, wurde eine Standlinie $AB = a$ gemessen, welche dem Ufer des Flusses in einem Abstande gleich b parallel lief. Darauf wurde von den Endpunkten der Standlinie nach einem am gegenüberliegenden Ufer unmittelbar am Wasser stehenden Pfahl C visirt, und es ergaben sich die Winkel $CAB = \alpha$, $ABC = \beta$. Wie breit war der Fluss an jener Stelle? $a = 686{,}734$, $b = 42{,}952$, $\alpha = 74^0\,16'\,0''$, $\beta = 86^0\,57'\,45''$

4. Man berechne die Breite AB eines Flusses, wenn in der Verlängerung von AB unter einem Winkel α gegen dieselbe eine Standlinie $CD = a$ angelegt ist, welche mit den Visirlinien von D nach den beiden Ufern die Winkel $CDB = \beta$, $CDA = \gamma$ bildet. $\alpha = 57^0\,13'\,15'',3$, $a = 56$, $\beta = 15^0\,31'\,49'',2$, $\gamma = 53^0\,7'\,48'',4$.

5. Die Entfernung der für einander unzugänglichen Punkte A, B auf dem Felde zu berechnen, wenn für einen im Alignement von AB liegenden Punkt C und für einen seitwärts liegenden Punkt D, $CD = a$, $\sphericalangle\, BCD = \alpha$, $ADC = \beta$, $BDC = \gamma$ bekannt sind. $a = 4607$, $\alpha = 95^0\,16',4$, $\beta = 52^0\,47',9$, $\gamma = 24^0\,38',6$.

6. Von einer geraden Strasse geht unter einem Winkel von 30^0 eine Nebenstrasse nach links und $1\frac{1}{2}$ Meilen weiter

eine zweite unter einem Winkel von 60^0 nach rechts ab. Auf der ersten trifft man nach einem Wege von 4 Meilen einen Ort A, auf der zweiten nach einem Wege von $2\frac{1}{2}$ Meilen einen Ort B. Beide Orte sind durch einen geraden Weg verbunden. Wie lang ist dieser?

7. Auf einem Schiffe erscheint ein Leuchtthurm in der Entfernung von a Meilen unter dem Winkel $\beta > 45^0$ gegen die Richtung nach Süden, und zwar auf der Westseite. Wie viel Meilen muss das Schiff nach Südwesten segeln, damit der Leuchtthurm im Norden stehe? $a = 4{,}4724$, $\beta = 52^0\,14'$.

8. Um die Entfernung der Punkte A und D zu bestimmen, zwischen welchen eine Strecke BC unzugänglich ist, hat man $AB = a$, $CD = b$ und an einem ausserhalb AD liegenden Punkte E die Winkel $AEB = \alpha$, $BEC = \beta$, $CED = \gamma$ gemessen. Wie gross ist BC? $a = 244$, $b = 520$, $\alpha = 82^0\,8'\,22'',7$, $\beta = 21^0\,2'\,29'',7$, $\gamma = 40^0\,14'\,8'',1$.

9. A, B, C seien drei unzugängliche Punkte, dagegen sei D auf der Verlängerung von AB über B, und E auf der Verlängerung von AC über C zugänglich und $DE = a$, $\sphericalangle\, BDE = \alpha$, $CDE = \beta$, $BED = \gamma$, $CED = \delta$ gemessen. Man berechne die gegenseitigen Entfernungen von A, B und C. $a = 289$, $\alpha = 56^0\,8'\,41'',9$, $\beta = 9^0\,57'\,45'',4$, $\gamma = 19^0\,49'\,6'',2$, $\delta = 100^0\,19'\,6'',4$.

10. Auf den Standpunkten A, B, C wurden gemessen $\sphericalangle\, BAD = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, ferner ist $BC = a$, $AC = b$. Man berechne AD, BD und CD. $\alpha = 68^0\,15'\,53'',3$, $\beta = 58^0\,6'\,33''2$, $\gamma = 34^0\,41'\,16'',5$, $a = 159$, $b = 377$.

11. Von drei Punkten A, B, C seien die gegenseitigen Entfernungen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben. Ein vierter Punkt D liege so, dass von ihm aus B und C nach derselben Richtung, B zwischen D und C, gesehen werden, während A unter dem Winkel $ADB = \delta$ gegen diese Richtung erblickt wird. Wie weit ist D von B entfernt? $a = 82{,}73$, $b = 65{,}48$, $c = 73{,}24$, $\delta = 27^0\,18'$.

12. Von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C seien die Entfernungen $AB = a$, $CB = b$ bekannt; an einem vierten Punkte D seien die Winkel $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$ gemessen. Man berechne die Entfernungen DA, DB und DC. $a = 232$, $b = 80$, $\alpha = 85^0\,11'\,58'',6$, $\beta = 46^0\,12'\,45'',4$.

13. Wie kann man zu drei ihrer gegenseitigen Lage nach bestimmten Punkten A, B, C die Lage eines vierten Punktes D derselben Ebene (der jedoch mit jenen nicht auf derselben Kreislinie und nicht in einer Geraden liegen darf) mittelst alleiniger Winkelmessung an letzterem bestimmen? (Pothenot'sche Aufgabe.) Gegeben: $AB = 221$, $AC = 480$, $BC = 509$, $\measuredangle BDA = 18^0\,55'\,28'',7$, $\measuredangle ADC = 32^0\,37'\,4'',3$. Gesucht: BD und AD. (AD liege zwischen BD und CD, A von D aus jenseits BC.)

14. An den Endpunkten einer gemessenen Basis $PQ = a$ wurden die Winkel der nach drei Punkten A, B, C gehenden Geraden $CPQ = \alpha$, $BPC = \beta$, $APB = \gamma$, $AQP = \delta$, $AQB = \varepsilon$, $BQC = \zeta$ gemessen. Man berechne AB, BC und AC. $a = 10987$, $\alpha = 29^0\,17'$, $\beta = 31^0\,19'$, $\gamma = 58^0\,41'$, $\delta = 41^0\,21'$, $\varepsilon = 39^0\,35'$, $\zeta = 35^0\,30$.

15. Zwei Strecken BD, DC einer Geraden erscheinen von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte A gleich gross. Man kennt die Abstände des Punktes A von den Punkten B, D und C und soll daraus die wahre und die scheinbare Länge von BC berechnen. $AB = 17,3204$, $AD = 20$, $AC = 34,6408$.

16. Man will in einem Walde eine vierseitige Fläche $ABCD$ von a $\square^m$ Inhalt abstecken und lässt zu diesem Zwecke von den Standpunkten A und B aus zwei schmale Gänge AC und BD durchhauen, die unter dem Winkel α gegen einander geneigt sind. Man sucht die Länge dieser Gänge, wenn sie einander und der Linie CD gleich sein sollen. $AB = b = 437$, $\alpha = 47^0\,8'$, $a = 4044$.

17. Die gegenseitige Lage der Orte A, B, C sei durch die Linien $AB = c$, $BC = a$ und den Winkel $ABC = \beta$ bestimmt. Von einem vierten Orte D (ausserhalb ABC), dessen Entfernungen von A und C bezüglich gleich d und e sind, während sich die Entfernung zwischen D und B wegen eines dazwischen liegenden Berggipfels nicht direct messen lässt, soll nach B eine Eisenbahn in gerader Linie gebaut, und zu diesem Zweck soll der Berg durch einen Tunnel durchbohrt werden. Man berechne 1) den Winkel, unter welchem die Richtung der Bahn gegen die Linie AD, und 2) den Winkel, unter welchem sie gegen BA zu legen ist. Nachdem dann die Strecke von D bis zum Anfang E des zu bauenden Tunnels gleich f und die

Strecke vom Ausgang F desselben bis nach B gleich g gemessen ist, berechne man die Länge des Tunnels. $a = 0,922875$, $c = 0,81548$ Meile. $\beta = 58^0\ 1'$, $d = 0,287087$, $e = 0,58940$, $f = 0,15401$, $g = 0,04901$ Meile.

18. An den Endpunkten einer Geraden CD, deren Länge sich nicht direct messen lässt, seien die Winkel der Gesichtslinien nach zwei Punkten A, B, nämlich $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \gamma$, $ADB = \delta$ gemessen; die Punkte A, B selbst seien von C und D aus unzugänglich, aber ihre Entfernung $AB = a$ bekannt. Man berechne die Länge von CD. $\alpha = 49^0\ 13'\ 57'',2$; $\beta = 15^0\ 11'\ 21'',4 = \gamma$, $\delta = 116^0\ 13'\ 22'',6$, $a = 276,06$.

19. Zwei einander nicht parallele Bahnstrecken sollen durch eine ∽ förmige Curve verbunden werden, welche aus zwei Kreisbogen von gleichen Radien besteht und die eine Strecke in einem gegebenen Punkte A, die andere in einem gegebenen Punkte B berührt, während die beiden zugehörigen Kreise ebenfalls einander berühren sollen. Zu diesem Zweck sind in A und B Perpendikel auf der jedesmal zugehörigen Bahnlinie errichtet, welche sich in C schneiden, und die Linien $AC = a$, $BC = b$ nebst dem Winkel $ACB = \gamma$ gemessen; man soll den Radius der Kreise berechnen.

β. Bestimmung von Höhen.

20. Um die Höhe SH eines Thurmes zu bestimmen, zu dessen Fuss H man nicht gelangen kann, sei in der Horizontalebene des letzteren eine Gerade $AB = a$ in der Richtung nach H nebst den Winkeln $SAH = \alpha$, $SBH = \beta$ gemessen. Wie gross ist SH? a) $a = 369,2$, $\alpha = 15^0\ 9'$, $\beta = 22^0\ 15'\ 12''$; b) $a = 367$, $\beta = 40^0\ 26'\ 18''$, $\alpha = 28^0\ 7'\ 11''$; c) $a = 500$, $\beta = 25^0\ 30'$, $\alpha = 12^0\ 10'\ 30''$.

21. Man berechne die Höhe einer Wolke, deren Schatten a Meter entfernt ist, wenn die Sonne mit ihr in derselben Vertikalebene steht, und der Höhenwinkel der Sonne gleich α, der Höhenwinkel der Wolke gleich β ist. $a = 89$, $\alpha = 28^0\ 55'\ 36'',6$, $\beta = 25^0\ 59'\ 21'',2$.

22. Auf einem Abhange steht eine Säule AB, deren Höhe berechnet werden soll. Es ist zu diesem Zweck vom Fusse der Säule den Abhang herab eine Strecke $BE = a$, und von da weiter in derselben Geraden eine Strecke $ED = b$, und in E

und D sind die Winkel $AEB = \alpha$, $ADB = \beta$ gemessen. Wie hoch ist AB? $a = 761$, $b = 60$, $\alpha = 80^0\ 5'\ 20''$, $\beta = 68^0\ 5'\ 30''$.

23. Vom Fusspunkt eines auf dem Abhange eines Berges stehenden Thurmes sei den Berg hinab eine Standlinie $BD = a$ gemessen. In D und im Halbirungspunkt von BD sind die Winkel zwischen den Visirlinien nach der Spitze und der Standlinie bezüglich gleich α und β gemessen. Wie hoch ist der Thurm? $a = 386$, $\alpha = 45^0\ 14'\ 2'',8$, $\beta = 60^0\ 30'\ 46'',4$.

24. Auf einer Horizontalebene stehen zwei Thürme, der eine von bekannter Höhe h. Um die Höhe des anderen zu berechnen, hat ein auf der Spitze desselben befindlicher Beobachter den Winkel α, welchen die vom Beobachtungspunkte nach der Spitze und nach dem Fusspunkte des ersteren Thurmes gezogenen Linien mit einander, sowie den Winkel β, den die letztere Linie mit der vom Beobachtungspunkte auf die Horizontalebene gefällten Senkrechten bildet, gemessen. Wie hoch ist der Thurm, und wie gross ist die Entfernung beider Thürme von einander? $h = 135,7$, $\alpha = 27^0\ 17'\ 38''$, $\beta = 65^0\ 37'\ 53''$.

25. In der Horizontalebene des Fusses H eines Thurmes SH sei eine Basis $AB = a$ nebst den Winkeln $BAH = \alpha$, $ABH = \beta$, $SAH = \gamma$, $SBH = \delta$ gemessen. Man berechne die Höhe SH des Thurmes auf zwei Arten und gebe eine zur Probe (oder Ausgleichung der Messungsfehler) dienende Gleichung an. $a = 90$, $\alpha = 56^0\ 33'\ 10''$, $\beta = 35^0\ 26'\ 21''$, $\gamma = 65^0 23' 4''$.

26. Man berechne die Höhe SH eines Thurmes aus dem Winkel α, welchen die von seiner Spitze S nach zwei Punkten A, B in der Horizontalebene seines Fusses gehenden Gesichtslinien mit einander bilden, und den Entfernungen der beiden Punkte von einander und von dem Fusse des Thurmes. $\alpha = 44^0\ 14'\ 48'',7$, $AB = 300$, $AH = 198$, $BH = 399$.

27. In A erscheint eine a Meter hohe Wolke in Südost unter einem Höhenwinkel gleich β; B liegt b Meter südlich von A auf derselben Horizontalebene. Unter welchem Höhenwinkel erscheint hier gleichzeitig die Wolke? $a = 160$, $b = 233\frac{7}{23}$, $\beta = 34^0\ 42'\ 29''$.

28. Berechne die Höhe eines Luftballons, welcher in A unter dem Höhenwinkel α in der Richtung nach Nord-Nordosten,

in B gleichzeitig unter einem Höhenwinkel gleich β in der Richtung nach Nordosten gesehen wird, wenn die horizontale Linie $AB = a$ ist. $\alpha = 20^0\ 36'$, $\beta = 36^0\ 43'$, $a = 27\frac{58}{91}$.

29. Von einem Luftballon herab erblickt man die beiden Orte A und B auf der Erde bezüglich unter den Depressionswinkeln α und β, während die Entfernung beider Orte von einander gleich c ist und vom Luftballon aus unter dem Gesichtswinkel γ erscheint. Wie hoch befindet sich der Ballon über der Horizontalebene, in welcher die Orte A und B liegen, und wie weit ist derselbe von letzteren entfernt? $\alpha = 72\frac{1}{2}{}^0$, $\beta = 30\frac{1}{4}{}^0$, $\gamma = 25\frac{3}{4}{}^0$, $c = 1800$.

30. Von drei Punkten A, B, C einer horizontalen Standlinie, in welcher $AB = a$, $BC = b$ gegeben ist, sind die Höhenwinkel zu der Spitze eines Gebäudes bezüglich gleich α, β, γ gemessen. Wie hoch ist dasselbe? $a = 50$, $b = 30$, $\alpha = 9^0\ 29'\ 41'',5$, $\beta = 51^0\ 14'\ 0'',0$, $\gamma = 27^0\ 51'\ 0'',0$.

31. Von einem Punkte eines Abhangs, der tiefer liegt, als die Spitze eines am Fusse der Anhöhe stehenden Thurmes, misst man den Abhang hinab eine Standlinie gleich a, deren Verlängerung den Fuss des Thurmes treffen würde, bestimmt an ihren Endpunkten die Höhenwinkel β, γ der Thurmspitze und an einem beliebigen Punkte der Standlinie den Depressionswinkel δ des Fusses des Thurmes. Wie hoch ist der Thurm? $a = 10^m$, $\beta = 37^0\ 12'\ 41'',5$, $\gamma = 60^0\ 8'\ 14'',0$, $\delta = 72^0\ 56'\ 18'',5$.

32. Um die Erhebung der Spitze S eines Berges über das Niveau eines an seinem Fusse liegenden Ortes A zu bestimmen, ist in der durch A und S gehenden Vertikalebene eine nach der Spitze ansteigende Strecke $AB = a$ nebst den Winkeln $SAB = \alpha$, $SBA = \beta$ gemessen. In A ist ein vertikaler Massstab aufgestellt, und von B aus ist mittelst der horizontalen Visirlinie eines Nivellirinstrumentes auf dem Massstab die Höhe $AC = b$ abgelesen. Man berechne die Höhe des Berges über dem Niveau von A. $a = 15$, $\alpha = 43^0\ 40'\ 4'',0$, $\beta = 134^0\ 1'\ 21'',2$, $b = 9$.

33. Zur Bestimmung der Höhe AB eines Berges über dem Horizont eines Punktes C sei auf einer von C gegen den Berg ansteigenden Ebene in der durch C und die Spitze A gehenden Vertikalebene die Strecke $CD = a$ gemessen. In C und D

werde ein Winkelinstrument aufgestellt, dessen Höhe EC oder GD gleich b bekannt ist, und man messe die Höhenwinkel $AEK = \alpha$, $AGL = \beta$. In D sei zugleich mittelst des horizontal gestellten Fernrohrs desselben Instruments die Höhe $MC = c$ abgelesen, welche die Gesichtslinie desselben auf einer in C vertikal aufgestellten Latte abschneidet. Man soll AB berechnen. $a = 79{,}0063$, $b = 3$, $\alpha = 21^0\,14'\,21'',5$, $\beta = 29^0\,29'\,13'',6$, $c = 4$.

34. Wenn die Sonnenstrahlen den horizontalen Erdboden unter einem Winkel von $55^0\,5'\,58''$ treffen, so wirft ein Haus, welches dicht am Fusse eines Bergabhangs steht, auf die Böschung desselben einen 7^m langen Schatten. Wie hoch ist das Haus, wenn die Böschung des Berges in der Richtung des Schattens unter 25^0 ansteigt?

γ. Horizontalmessungen verbunden mit Höhenmessungen.

35. Wie weit sind zwei durch ein Thal getrennte Bergspitzen A, B von einander entfernt, deren Höhen über dem Standpunkt C im Thale bezüglich a und b Dekameter betragen, wenn die von C aus gemessene Erhebung der Spitze A über die Horizontale gleich α, die der Spitze B gleich β und die Projection des Gesichtswinkels ACB auf den Horizont gleich γ ist? $a = 20$, $b = 15$, $\alpha = 8^0\,35'$, $\beta = 10^0\,20'$, $\gamma = 140^0\,45'$.

36. An der Spitze S eines Thurmes SH, dessen Höhe gleich h bekannt ist, sind die Winkel, welche die Gesichtslinien nach zwei unzugänglichen Punkten A, B der Horizontalebene seines Fusses mit der Vertikalen bilden, $ASH = \alpha$, $BSH = \beta$, und am Fusse H des Thurmes ist der Winkel $BHA = \gamma$ gemessen. Es soll AB berechnet werden. $h = 2000$, $\alpha = 10^0\,15'\,10''$, $\beta = 6^0\,7'\,20''$, $\gamma = 49^0\,34'\,50''$.

37. A und B seien zwei Punkte, deren Entfernung sich wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses nicht unmittelbar messen lässt. An der Spitze C eines Berges (Thurmes), dessen Höhe CD über der gemeinschaftlichen Horizontalebene von A und B gleich h bekannt ist, sei der Winkel $ACB = \alpha$, und in A und B seien die Elevationswinkel $DAC = \beta$, $DBC = \gamma$ gemessen. Es soll AB berechnet werden. $h = 517',3$, $\alpha = 15^0\,12'\,13''$, $\beta = 21^0\,9'\,18''$, $\gamma = 23^0\,15'\,34''$.

38. Es seien A, B, C drei Orte auf der als Ebene betrachteten Erdoberfläche, und man habe in B den Winkel $CBA = \alpha$, die Depression $A'BA = \delta$ von A unter den Horizont von B und die Elevation $CBC' = \varepsilon$ von C über dem Horizont von B, sowie in C den Winkel $BCA = \gamma$ bestimmt. Ferner sei von B aus in der Richtung nach A eine Basis $BD = a$ und in D der Winkel $BDC = \beta$ gemessen. Man berechne die Entfernungen der drei Orte von einander und die Höhen von B und C über dem Niveau von A. $\alpha = 24^0\, 11'\, 22'',3$, $\delta = 3^0\, 35'\, 0'',0$, $\varepsilon = 12^0\, 40'\, 49'',4$, $\gamma = 144^0\, 55'\, 47'',3$, $a = 200$, $\beta = 81^0\, 12'\, 9'',3$.

b. Aufgaben aus der Mechanik.

39. Zwei Kräfte P, Q wirken auf ein Atom unter dem Winkel α. Man bestimme die Grösse und die Richtung ihrer Resultante. $P = 72$ Kilogramm, $Q = 96$ Kgr., $\alpha = 72^0$.

40. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte, welche bezüglich gleich P und Q sind, zerlegt werden. Welche Winkel bilden die Richtungen der beiden letzteren mit der Richtung der gegebenen Kraft? $R = 91{,}82$, $P = 84{,}182$, $Q = 82{,}9033$.

41. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit der Richtung von R bezüglich die Winkel α und β bilden. Wie gross sind die Seitenkräfte? $R = 10000$, $\alpha = 70^0\, 50''\, 12',5$, $\beta = 30^0\, 27'\, 45''$.

42. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine gleich P ist und mit der Richtung von R den Winkel α bildet. Man bestimme die Grösse und Richtung der anderen. $R = 233$, $P = 111$, $\alpha = 82^0\, 8'\, 22'',7$.

43. Eine Kraft R soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine gleich P ist und die andere mit R den Winkel α bildet. Man bestimme die Grösse der anderen und die Richtung von P. $R = 233$, $P = 296$, $\alpha = 103^0\, 10'\, 52'',4$.

44. Eine Seitenkraft P ist nebst den Winkeln α, β, welche sie mit der anderen Seitenkraft und mit der Resultante bildet, gegeben; man berechne die beiden letzteren Kräfte. $P = 3549$, $P/Q = \alpha = 92^0\, 20'\, 17'',8$, $P/R = \beta = 18^0\, 55'\, 28'',7$.

45. Der Schwerpunkt eines Trapezes liegt sowohl auf der Verbindungslinie der Halbirungspunkte der parallelen Seiten, als

auch auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche das Trapez durch eine Diagonale getheilt wird. Man berechne den auf der ersteren Verbindungslinie gemessenen Abstand des Schwerpunktes von der grösseren parallelen Seite a, wenn die beiden parallelen Seiten und die spitzen Winkel des Trapezes gegeben sind. Welchen Ausdruck erhält man für denselben, a) wenn die spitzen Winkel einander gleich sind, b) wenn die parallelen Seiten einander gleich werden, c) wenn die kleinere parallele Seite gleich Null wird?

46. Von einem Lanzen-Viereck, d. h. einem Viereck, in welchem zwei aneinander liegende Seiten unter sich und die beiden anderen ebenfalls unter sich gleich sind, seien zwei ungleiche Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben. Man berechne die Abstände des Schwerpunktes dieses Vierecks von den beiden Eckpunkten, in welchen je zwei gleiche Seiten zusammenstossen. $a = 106$, $b = 65$, $\gamma = 88^0\ 37'\ 10''$.

47. Zu beweisen: Halten sich drei an einem Punkte in derselben Ebene wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so hat der Quotient aus jeder von ihnen und dem Sinus des von den Richtungen der beiden anderen gebildeten Winkels für alle drei Kräfte denselben Werth.

48. Zu beweisen: Zieht man von einem Punkte aus gerade Linien, welche bezüglich den Seiten eines geradlinigen Drei-(n-) Ecks gleich und gleichgerichtet sind, und stellen diese Linien die Grössen und Richtungen von auf jenen Punkt wirkenden Kräften dar, so sind diese Kräfte unter einander im Gleichgewicht.

49. Zwei Körper fallen gleichzeitig von demselben Punkte aus, der eine frei, der andere auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten schiefen Ebene. Wie gross ist, wenn vom Widerstand der Luft und von der Reibung abgesehen werden kann, die gegenseitige Entfernung beider Körper nach t Secunden? $\alpha = 9^0\ 51'$, $t = 3$, $g = 9^m{,}808$.

50. Der Schall legt in jeder Secunde 333^m zurück, in A sei der Sehwinkel der geradlinigen Bahn eines Blitzes gleich α, die Zeit zwischen dem Blitz und dem Donner gleich b Secunden, die Dauer des Donners gleich c Secunden. Wie lang ist der vom Blitz durcheilte Weg? $\alpha = 43^0\ 36'\ 10''{,}1$, $b = 17$, $c = 2\frac{1}{3}$.

c. Vermischte Aufgaben.

51. Ein Stab, dessen Länge gleich l^{cm} ist, warf, als die Höhe der Sonne gleich α und letztere mit ihm in derselben Vertikalebene war, einen Schatten von a^{cm} Länge auf eine horizontale Ebene. Unter welchem Winkel war der Stab gegen letztere geneigt? $l = 87{,}192$, $\alpha = 60^0\,41'$, $a = 76{,}586$.

52. Der Höhenwinkel der Sonne sei gleich α, und BC sei eine in der Ebene dieses Höhenwinkels auf der Horizontalebene stehende Stange. Wie gross ist der Neigungswinkel der letzteren gegen die Ebene, wenn die Schattenlänge **a**) ihr Maximum, **b**) ihr Minimum erreicht, und **c**) wenn sie gleich BC wird?

53. **a**) An zwei Orten C, D der Erde, welche unter demselben Meridian liegen, sind bei der nämlichen Culmination eines Himmelskörpers die Zenithdistanzen γ, δ desselben beobachtet worden. Man soll hieraus, aus dem Breitenunterschied beider Orte $CBD = \beta$ und aus dem bekannten Radius der Erde $CB = DB = r$ den Abstand des Himmelskörpers A von dem Mittelpunkt der Erde berechnen.

b) A und B liegen unter demselben Meridian, A unter α^0 nördl. Breite, B unter β^0 südl. Breite. An beiden Orten wird der Mond zur Culminationszeit beobachtet; es ist die Zenithdistanz in A gleich γ, in B gleich δ. Man sucht die Entfernung des Sterns vom Mittelpunkt der Erde in Beziehung auf den Erdradius als Einheit. $\alpha = 48^0\,8'\,20''$, $\beta = 20^0\,4'\,43''$, $\gamma = 44^0\,18'\,0''$, $\delta = 25^0 0' 0''$.

54. Ein Graben hat eine obere Breite von 18^{dc}, seine Seitenwände haben eine Neigung von $101^0\,18'\,35'',5$ gegen den Boden. Wie tief ist derselbe, wenn bei einer Entfernung von 1^m von seinem Rande und bei einer Erhebung des Auges um 8^{dc} über dem Erdboden der Boden des Grabens verschwindet?

55. Auf einem Billard $ABCD$, dessen Länge $AB = a$ und dessen Breite $BC = b$ sei, befinde sich in einem Punkte, dessen Entfernung von AB gleich x und von BC gleich y gegeben ist, ein Ball. Unter welchem Winkel wird derselbe an die Bande AB anschlagen müssen, um quadruplirt einen in der Mitte des Billards stehenden Kegel zu treffen? $a = 9$, $b = 5$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$.

56. Die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks liegen in drei parallelen Geraden, deren mittlere von den äusseren um bezw. a^m und b^m entfernt ist; man sucht die Höhe des Dreiecks.

57. In einem Dreieck ABC ist $AC = 2{,}2307101$, $BC = 1{,}6329924$ und $\sphericalangle ACB = 60^0$ gegeben. Ein zweites Dreieck DEF ist so construirt, dass E auf AC liegt und diese Linie in die Abschnitte $AE = \sqrt{2}$, $CE = 0{,}8164465$ theilt, D auf BC, F auf AB liegt, und $\sphericalangle EDC = 45^0$, $\sphericalangle EFD = 60^0$ ist. Was lässt sich von dem Dreieck DEF behaupten?

58. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt eines ihm einbeschriebenen Dreiecks zu berechnen, dessen Seiten bezüglich senkrecht zu den Seiten des ersteren stehen. $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$.

59. Auf jeder Seite eines Dreiecks sei $\frac{1}{n}$ derselben nach einerlei Richtung hin abgeschnitten; wie gross ist n zu nehmen, wenn das durch die Theilpunkte der Seiten bestimmte Dreieck gleich dem $n$ten. Theile des ursprünglichen sein soll, und wieviel beträgt der Inhalt dieses Dreiecks, wenn das gegebene die Höhen h, h' und den beiden gegenüberliegenden Winkel gleich γ hat?

60. Im Innern eines Dreiecks ABC, dessen Seiten bezüglich gleich a, b, c gegeben sind, sei ein Punkt P so angenommen, dass die Winkel APB, BPC, CPA einander gleich sind. Man berechne die Werthe von

$$S = PA + PB + PC.$$

und

$$\Sigma = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

Für ein rechtwinkeliges Dreieck ist

$$S = \sqrt{c^2 + ab\sqrt{3}},\ \Sigma = c^2 - ab : \sqrt{3}.$$

61. Die Abstände eines in der Fläche eines Dreiecks liegenden Punktes von den Seiten a, b, c seien beziehungsweise gleich a_1, b_1, c_1 und ausserdem sei $\sphericalangle a_1 \mid b_1 = \gamma_1$, $\sphericalangle b_1 \mid c_1 = \alpha_1$ gegeben. Man berechne die Seiten und die Winkel des Dreiecks. $a_1 = 14{,}9883$; $b_1 = 15$; $c_1 = 17$; $\alpha_1 = 106^0\,15'\,36'',8$; $\gamma_1 = 126^0\,54'\,11'',6$.

62. Von zwei Punkten A, B auf derselben Seite einer Geraden MN sind nach einem Punkte X der letzteren gerade Linien gezogen, welche mit ihr gleiche Winkel bilden. Man be-

rechne die Grösse dieser Winkel aus den Abständen m, n der Punkte A, B von MN und dem Winkel α, welchen die Verbindungslinie von A und B mit MN bildet. $m = 943$, $n = 381$, $\alpha = 23^0$.

63. Es sind drei Punkte A, B, C der Lage nach gegeben ($\measuredangle ACB = \gamma$). Unter welchem Winkel gegen AC ist durch C eine Linie so zu legen, dass das Rechteck aus den beiden von A und B auf diese Linie gefällten Senkrechten dem Dreieck ABC inhaltsgleich wird? $\gamma = 90^0$.

64. Um jeden Eckpunkt eines Rhombus, von welchem ein Winkel gleich α und die Seite gleich a gegeben ist, sei ein Kreis mit der halben Seite als Radius beschrieben. Man berechne den Inhalt der im Rhombus liegenden, von vier Kreisbogen begrenzten Figur. Insbesondere werde $\alpha = 90^0$ gesetzt.

65. Von zwei Tangenten eines Kreises sind die von ihrem Durchschnittspunkt bis zu den Berührungspunkten reichenden Strecken $BD = BF = a$ und der Winkel $B = \beta$ gegeben. Um eine dritte Tangente so an den Kreis zu ziehen, dass das von den zwei ersteren begrenzte Stück AC derselben gleich b sei, soll der Abschnitt CD berechnet werden. $a = 6{,}05$, $\beta = 5^0\,12'\,18'',4$, $b = 1{,}25$.

66. Die Centrallinie zweier Kreise sei gleich c; die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich unter dem Winkel α, die inneren unter dem Winkel β. Wie gross sind die Radien? $c = 714$, $\alpha = 36^0\,8'$, $\beta = 104^0\,12'$.

67. Ein Kreis, dessen Radius gleich ϱ ist, berühre jeden von zwei Kreisen, deren Radien bezüglich gleich R und r sind, und deren Centrallinie gleich d gegeben ist, von Aussen. Man berechne den Winkel der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte gegen diese Centrallinie. $\varrho = 15$, $R = 17{,}8$, $r = 9{,}1$, $d = 16{,}9$.

68. Man berechne die Radien derjenigen Kreise, welche zwei gegebene Kreise, und zwar den einen von ihnen in einem gegebenen Punkte berühren, wenn die Radien und die Centrallinie der letzteren, sowie der Winkel, welchen diese Centrallinie mit dem nach dem gegebenen Punkt gehenden Radius des betreffenden Kreises bildet, bekannt sind.

69. Um einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene

gerade Linien AB, AC berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht, soll der Abstand des einen Berührungspunktes C von P aus dem Winkel $BAC = 2\alpha$ der beiden Geraden, der Strecke $AP = a$ und dem Winkel $PAC = \beta$ berechnet werden.

70. Um einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene sich in A schneidende gerade Linien BA, CA und einen zwischen denselben gegebenen Kreis berührt, sei der Mittelpunkt M des letzteren mit A verbunden und $AM = a$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle MAB = \gamma$ gemessen; der Radius des gegebenen Kreises sei gleich r. Man berechne den Winkel, welchen die Centrallinie der beiden Kreise mit AM bildet.

71. Die Verbindungslinien zweier Punkte A, B mit dem Mittelpunkte C eines Kreises seien nebst dem Winkel dieser Linien gemessen; der Radius des Kreises sei gleich r gegeben. Ein zweiter Kreis, dessen Mittelpunkt O heisse, soll den ersteren von Aussen berühren und durch die Punkte A und B gehen. Man berechne den Winkel ACO.

72. Man construirt in einen gegebenen Kreis näherungsweise ein regelmässiges Siebeneck, wenn man als dessen Seite die halbe Seite des einbeschriebenen regelmässigen Dreiecks annimmt. Um wieviel weicht der Centriwinkel einer solchen Sehne von dem des vollkommen richtigen Siebenecks ab?

73. Eine andere näherungsweise Construction, welche sich allgemein auf jedes regelmässige n-Eck anwenden lässt, wenn n nicht kleiner als 6 ist, ist die folgende (aus Kunze, Geometrie): Man ziehe einen Durchmesser AB und einen zu demselben senkrechten Radius CD, theile AB in n gleiche Theile, verlängere AB um AE und CD um DF, sodass AE und DF je gleich einem dieser Theile sind, ziehe EF, welche Linie den Kreis zum ersten Mal in G schneiden möge, und verbinde G mit dem dritten Theilpunkt H von AB, so ist GH näherungsweise die gesuchte Seite des n-Ecks. Man berechne nun auch hier den Unterschied des angenäherten und des richtigen Centriwinkels für das Siebeneck.

74. Ebenso für folgende Näherungsconstruction des Sieben-Ecks. Man construire einen rechten Centriwinkel und mache dessen einen Schenkel gleich dem Radius, den anderen gleich dem Durchmesser, so schneidet die zugehörige Hypotenusen-Sehne nahezu $\frac{1}{7}$ von der Peripherie ab.

75. Ebenso für die folgende des Sieben-Ecks: Vom Anfangspunkte eines Sextanten ziehe man durch den Mittelpunkt eine Secante gleich dem sechsfachen Durchmesser und verbinde die beiden Endpunkte; der andere Bogen zwischen den Secanten ist nahezu $\frac{1}{7}$ der Peripherie. (Ziegler, Trigonometrie.)

76. Ebenso für folgende allgemeine (für $n=3$ oder 4 oder 6 genaue) Construction: Man beschreibe über einem Durchmesser AB ein gleichseitiges Dreieck, theile AB in n gleiche Theile und ziehe von der Spitze C des Dreiecks eine Secante durch den zweiten Theilpunkt D. Der Bogen von A bis zur Verlängerung von CD ist nahezu der $n$te Theil der Peripherie.

77. Zu der gegebenen Seite $AB=a$ eines regelmässigen Neunecks findet man näherungsweise den Radius des ihm umbeschriebenen Kreises, wenn man über AB das gleichseitige Dreieck ABD errichtet, die Höhe DE desselben um $DC=\frac{1}{2}AB$ verlängert und AC zum Radius nimmt. Um wieviel ist der Centriwinkel, der in diesem Kreis zur Sehne AB gehört, grösser als der des vollkommen richtigen Neun-Ecks, und um wieviel ist der richtige Radius des ersteren Neun-Ecks grösser als der construirte?

§. 29. Tetragonometrie.

A. Das allgemeine Viereck.

Vorbemerkung: Es seien im Folgenden A, B, C, D der Reihe nach die Eckpunkte eines Vierecks (im engeren Sinn), die Seiten AB, BC, CD, DA desselben seien bezüglich durch a, b, c, d, die Winkel an A, B, C, D entsprechend durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet. Die Verlängerungen von CD über D und von BA über A mögen sich in E unter dem Winkel w schneiden. Fällt man CF und DG senkrecht auf AB und zieht DH parallel zu AB bis zum Durchschnitt H mit CF, so ergiebt sich leicht, indem man AB und CF doppelt ausdrückt: $a=b\cos\beta - c\cos(\beta+\gamma)+d\cos\alpha$, oder auch $a=b\cos\beta-c\cos(\alpha+\delta)+d\cos\alpha$ und $b\sin\beta=d\sin\alpha+c\sin(\beta+\gamma)$, oder auch $b\sin\beta=d\sin\alpha - c\sin(\alpha+\delta)$, welche Gleichungen man auch in den leichter zu behaltenden Formen

$$a\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=d\cos\alpha-c\cos(\beta+\gamma)+b\cos\beta$$

oder

$$a\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=d\cos\alpha-c\cos(\alpha+\delta)+b\cos\beta$$

und

$$a\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=d\sin\alpha+c\sin(\beta+\gamma)-b\sin\beta$$

oder

$$a\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=d\sin\alpha-c\sin(\alpha+\delta)-b\sin\beta$$

schreiben kann. Diese Gleichungen (in Verbindung mit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$) drücken die Abhängigkeit der acht Stücke (Seiten und Winkel) eines Vierecks von einander aus und zeigen, dass durch fünf dieser Stücke, unter denen sich nicht alle vier Winkel zugleich befinden, die drei übrigen im Allgemeinen bestimmt sind.

Zur Berechnung eines Vierecks aus fünf gegebenen Bestimmungsstücken wird es jedoch im einzelnen Fall in der Regel bequemer sein, sich, statt der Auflösung der obigen Gleichungen auf die gesuchten

Stücke, der Zerlegung desselben in Dreiecke oder ähnlicher Methoden zu bedienen. Die Theilung eines Vierecks durch eine Diagonale führt nicht immer auf Dreiecke, welche durch die gegebenen Stücke unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind, und in derartigen Fällen, welche im engeren Sinn als tetragonometrische Aufgaben zu bezeichnen sind, hat man nach anderweiten Methoden der Berechnung zu suchen.

Die Aufgabe der Tetragonometrie erfährt eine Erweiterung durch die Ausdehnung des Begriffs Viereck auf jede Verbindung von vier Punkten einer Ebene durch eine stetig fortlaufende und zu ihrem Anfangspunkt zurückkehrende gebrochene Linie zwischen jenen Punkten. Man sieht leicht ein, dass sich die vier Punkte A, B, C, D ausser in der Reihenfolge $ABCDA$ auch noch in den beiden folgenden $ABDCA$ und $ADBCA$ verbinden lassen, und dass also zu denselben drei verschiedene Vierecke im weiteren Sinn gehören, von denen zwei sogenannte Vierecke mit Doppelpunkten, d. h. solche sind, deren Umfänge sich in einem Punkte schneiden. Als innere Winkel eines solchen Vierecks hat man vier von seinen Seiten gebildete Winkel zu betrachten, welche bei der Beschreibung seines Umfangs zu derselben Hand (einerlei nach welcher) liegen, sodass (mit einer noch zu nennenden Ausnahme) zwei derselben überstumpf sind und die Summe aller vier Winkel auch hier vier Rechte beträgt. Ersetzt man die überstumpfen Winkel durch die zugehörigen hohlen Winkel, welche von einer zur Seite des Vierecks gewordenen Diagonale des entsprechenden einfachen Vierecks mit einer anderen Seite gebildet werden, so ist die Summe zweier von den vier Winkeln gleich der Summe der beiden anderen.

Zu jeder tetragonometrischen Aufgabe über ein einfaches Viereck gehören demnach entsprechende Aufgaben über Vierecke mit Doppelpunkten, bei denen für letztere die als Bestimmungsstücke gegebenen Seiten oder Winkel derselben der gegenseitigen Lage nach den im ersteren Fall gegebenen Stücken entsprechen, und welche sich auch in entsprechender Weise behandeln lassen.

Da aber zu jedem Viereck mit Doppelpunkt ein einfaches Viereck mit denselben Eckpunkten gehört, so lassen sich die Aufgaben über Vierecke der ersteren Art auch als solche über einfache Vierecke ansehen, bei denen unter die Bestimmungsstücke auch die Diagonalen des letzteren und die von diesen mit den Seiten gebildeten Winkel aufgenommen sind. Die so erweiterte Aufgabe der Tetragonometrie führt endlich bei der verschiedenen Auswahl von fünf von einander unabhängigen Stücken aus den sechs Strecken und den zwölf Winkeln auch auf solche Aufgaben, bei welchen nicht sämmtliche fünf Bestimmungsstücke demselben von jenen drei Vierecken angehören.

Das von seinen Diagonalen durchschnittene Viereck kann dadurch entstanden gedacht werden, dass zu einem Dreieck ABC ein vierter Punkt D angenommen und mit den drei Eckpunkten des ersteren verbunden wurde. Hierbei ergeben sich folgende möglichen Fälle: a) der Punkt D liegt ausserhalb des Dreiecks ABC in dem Raume eines der inneren Winkel desselben; es entsteht ein einfaches Viereck mit vier hohlen Winkeln. b) D liegt ausserhalb ABC in dem Raume eines der Scheitelwinkel der inneren Winkel; es entsteht ein Viereck mit einem überstumpfen Winkel, welches nicht als Summe, sondern als Differenz der Dreiecke ADC und ABC zu betrachten ist. Die beiden einem solchen Viereck entsprechenden Vierecke haben keinen Doppelpunkt, sondern eine gleichartige Gestalt, wie jenes mit nur einem überstumpfen Winkel. Es ist hiernach bei der Berechnung eines Vierecks zu beachten, dass ein Winkel desselben grösser als 180^0 sein kann, und dass unter den von den Diagonalen mit den Seiten gebildeten Winkeln auch negative vorkommen können. c) D liegt

12*

innerhalb ABC. Das Viereck gehört zu der unter b) angegebenen Art (kann als ein jenem „entsprechendes" betrachtet werden). d) D liegt auf einer Seite oder auf der Verlängerung einer Seite von ABC; es entsteht ein Dreieck mit einer Ecken-Transversale, welches nur im uneigentlichen Sinn als ein Viereck betrachtet werden kann, in welchem ein Polygon- und zwei der Diagonal-Winkel gleich 0 oder gleich 180° geworden sind.

Beachtet man noch, dass das einfache Viereck durch jede seiner Diagonalen in zwei, durch beide also in vier Dreiecke zwischen seinen Eckpunkten zerlegt wird, so lassen sich die nach dem Vorigen möglichen Aufgaben nun praktisch in folgender Weise gliedern, wobei der Kürze halber $AC = e$, $BD = f$, $\sphericalangle DAC = \alpha_1$, $CAB = \alpha_2$, $ABD = \beta_1$, $DBC = \beta_2$, $BCA = \gamma_1$, $ACD = \gamma_2$, $CDB = \delta_1$, $BDA = \delta_2$ gesetzt ist.

a) Aufgaben, in welchen durch die gegebenen Stücke **zwei** von den vier Dreiecken unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind. Alle Stücke lassen sich dann durch bloss trigonometrische Dreiecksberechnung finden (die trigonometrischen Vierecks-Aufgaben). Beispiele sind:

1. Gegeben: a, b, c, d, e; $a = 60$, $b = 52$, $c = 101$, $d = 105{,}341$, $e = 56$.

2. $a, b, e, \alpha_1, \gamma_2$; $a = 9{,}2196$; $b = 10{,}6302$; $e = 14$; $\alpha_1 = 56^0\, 18'\, 35'',6$; $\gamma_2 = 48^0\, 21'\, 57'',9$.

3. $a, c, e, \alpha_2, \gamma_2$; $a = 10{,}6302$, $c = 13{,}4536$, $e = 16$, $\alpha_2 = 48^0\, 48'\, 50'',5$, $\gamma_2 = 48^0\, 0'\, 46'',0$.

---

4. a, b, c, β, δ; $a = 3{,}16229$, $b = 5{,}831$, $c = 8{,}6024$, $\beta = 77^0\, 28'\, 13'',1$, $\delta = 43^0\, 40'\, 3'',76$.

5. $a, b, \beta, \alpha_1, \gamma_2$; $a = 2{,}2361$, $b = 3{,}6055$, $\beta = 82^0 52' 29'',9$, $\alpha_1 = 75^0\, 57'\, 49'',8$, $\gamma_2 = 53^0\, 7'\, 48'',4$.

6. $a, e, \beta, \gamma, \delta$; $a = 3{,}16229$, $e = 6$, $\beta = 77^0\, 28'\, 13'',1$, $\gamma = 81^0\, 9'\, 29'',1$, $\delta = 49^0\, 16'\, 5'',1$.

---

7. a, b, c, β, γ; $a = 5$, $b = 13$, $c = 17$, $\beta = 165^0\, 44'\, 59'',9$, $\gamma = 95^0\, 27'\, 9'',4$.

8. $a, b, d, \alpha_2, \beta_1$; $a = 5{,}8310$, $b = 8{,}6024$, $d = 9{,}4868$, $\alpha_2 = 59^0\, 2'\, 10'',4$, $\beta_1 = 30^0\, 57'\, 49'',6$.

9. a, b, c, β, δ_1; $a = 8{,}06225$, $b = 10{,}6302$, $c = 12{,}8062$, $\beta = 78^0\, 33'\, 31'',75$, $\delta_1 = 38^0\, 39'\, 34'',4$.

---

10. $a, c, \alpha, \delta, \alpha_1$; $a = 4{,}47215$, $c = 10{,}8168$, $\alpha = 140^0 54' 21'',7$, $\delta = 46^0\, 13'\, 8'',4$, $\alpha_1 = 77^0\, 28'\, 16'',0$.

11. $e, f, \gamma_1, \delta_2, d$; $e = 5$, $f = 7$, $d = 5{,}099$, $\gamma_1 = 26^0\, 33'\, 54'',3$, $\delta_2 = 11^0\, 18'\, 35'',45$.

12. $a, b, \beta, \alpha_1, \delta_2$; $a = 3{,}16229$, $b = 6{,}70840$, $\beta = 81^0\ 52'\ 8'',4$, $\alpha_1 = 83^0\ 39'\ 35'',0$, $\delta_2 = 6^0\ 20'\ 25'',0$.

b) Ein Dreieck ist trigonometrisch bestimmt, die Aufgabe jedoch tetragonometrisch im engeren Sinn. Die Auswahl der drei Stücke für jenes Dreieck bedingt keine wesentlichen Unterschiede der Aufgaben, die beiden übrigen Stücke können sein:

α) eine Seite und ein Winkel:

1. a, b, c, β, δ_2. $a = 2{,}2361$, $b = 5{,}38513$, $c = 8{,}6024$, $\beta = 94^0\ 45'\ 49'',5$, $\delta_2 = 8^0\ 7'\ 48'',2$.

Entsprechende Aufgabe: a, b, e, f, δ.

β) Zwei Winkel:

2. $a, b, \beta, \beta_1, \delta$; $a = 2{,}2361$, $b = 6{,}32457$, $\beta = 98^0\ 7'\ 48'',6$, $\beta_1 = 26^0\ 33'\ 54'',3$, $\delta = 48^0\ 43'\ 52'',85$. Entsprechend: $a, b, e, \alpha_1, \delta_1$.

3. $a, b, \beta, \delta_1, \delta_2$; (Pothenot'sche Aufgabe; vgl. §. 28, 13.) $a = 3{,}16229$, $b = 5{,}831$, $\beta = 77^0\ 28'\ 13'',1$, $\delta_1 = 32^0\ 0'\ 19'',6$, $\delta_2 = 7^0\ 7'\ 30'',0$.

c) Kein Dreieck ist unmittelbar trigonometrisch bestimmt, die Aufgabe also stets tetragonometrisch im engeren Sinn.

α) Tetrag. Aufgaben, bei welchen alle fünf gegebenen Stücke in demselben der drei Vierecke liegen. (Polygon-Messung aus dem Umfang.)

1. $a, c, \alpha, \beta, \gamma$; $a = 25$, $c = 41$, $\alpha = 16^0\ 15'\ 36'',7$, $\beta = 210^0\ 8'\ 13'',2$, $\gamma = 120^0\ 55'\ 20'',7$.

Man verlängere die nicht gegebenen Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt. Entsprechende Aufgaben: $e, f, \alpha_1, \beta_2, \delta_2$ und $a, c, \alpha_2, \beta_1, \gamma_2$.

2. a, b, c, α, δ; $a = 4{,}12318$, $b = 7{,}211$, $c = 10{,}8168$, $\alpha = 159^0\ 37'\ 24'',8$, $\delta = 40^0\ 1'\ 49'',4$.

Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke und ein Parallelogramm. Entsprechend $a\,c\,e\,\beta_1\,\delta_1$ oder $a\,e\,f\,\gamma_2\,\delta_1$.

β) Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Stücken nur eine Strecke vorkommt. (Messung aus einer Basis.)

Durch vier von einander unabhängige unter den zwölf Winkeln des von seinen Diagonalen durchschnittenen Vierecks ist im Allgemeinen die Gestalt desselben bestimmt und man kann daher stets irgend eine der sechs Strecken desselben willkürlich annehmen, um aus ihr und den gegebenen Winkeln ein dem gesuchten ähnliches Viereck zu erhalten. Aus dem berechneten letzteren ergeben sich dann für die jedesmal gegebene Strecke des gesuchten Vierecks die übrigen Stücke desselben sehr einfach durch Proportionen. Von früheren Vierecks-Aufgaben können hierher gezogen werden die trigonometrisch unmittelbar bestimmte $a\,\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2$ und verwandte, und die tetragonometrischen b 2) in der Form $a\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2\,\delta$ und b 3) in der Form $a\,\alpha_2\,\beta\,\delta_1\,\delta_2$.

Ausserdem können noch im Wesentlichen die folgenden aufgestellt werden:

3. $e, \alpha, \beta, \gamma, \delta_1$; $e = 30$, $\alpha = 155^0\ 13'\ 32'',3$, $\beta = 77^0\ 28'\ 13'',1$, $\gamma = 91^0\ 54'\ 32'',93$, $\delta_1 = 29^0\ 3'\ 16'',67$.

Ist durch ein ähnliches Viereck auf eine unmittelbar trigonometrisch bestimmte Aufgabe zurückzuführen. Entsprechend: $b\,\delta\,\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_2$.

4. $c, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta_2$; $c = 7,81033$, $\beta = 92^0\ 43'\ 34'',8$, $\gamma_1 = 30^0\ 57'\ 49'',6$, $\gamma_2 = 50^0\ 11'\ 39'',5$, $\delta_2 = 18^0\ 26'\ 2'',7$.

Lässt sich durch ein ähnliches Viereck auf No. b 2 zurückführen. Entsprechend $a\,\alpha\,\gamma_1\,\gamma_2\,\delta_1$.

5. $f, \alpha_2, \beta, \delta_1, \delta_2$; $f = 14$, $\alpha_2 = 68^0\ 11'\ 55'',2$, $\beta = 76^0\ 15'\ 49'',24$, $\delta_1 = 37^0\ 52'\ 29'',8$, $\delta_2 = 12^0\ 31'\ 44'',0$.

Lässt sich durch ein ähnliches Viereck auf die Pothenot'sche Aufgabe No. b 3 zurückführen.

6. $a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ und entsprechend $a, \beta, \gamma, \alpha_1, \delta_2$.

Schwierige Aufgabe, welche sich auf keine der früheren zurückführen lässt. (Gleich. höheren Grades.)

γ) Sonstige tetragonometrische Aufgaben.

Liegen in keinem der vier Dreiecke des Vierecks mehr als zwei gegebene Stücke, so kann man ein oder zwei zweckmässig ausgewählte von den nicht gegebenen als bekannt voraussetzen und mittelst derselben eins oder zwei der gegebenen Stücke doppelt ausdrücken. Die hierdurch entstehenden Gleichungen gestatten nun rückwärts durch Auflösung auf jene als bekannt angenommenen Stücke die Bestimmung derselben, welche für den Fall, dass diese Gleichung von einem höheren Grade wird, bei numerischen Beispielen durch Näherung ausgeführt werden kann. Leichtere Aufgaben dieser Art sind:

7. $a, c, \beta, \gamma, \alpha_1$. Man drücke e doppelt aus und bestimme dadurch γ_2. Entsprechende Aufgaben: $e\,f\,\alpha\,\delta_1\,\gamma_2$ und $a\,c\,\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$.

8. $a, c, \beta_2, \gamma_1, \delta_2$. Drücke e oder f doppelt aus und bestimme α_2. Entsprechend $\alpha\,\beta\,\gamma\,e\,f$.

9. $a, b, \alpha_1, \gamma_2, \delta_1$. Drücke c und d mittelst f, sowie das Verhältniss von c und d mittelst α_1 und γ_2 aus und bestimme f. Entsprechend: $a\,f\,\alpha_1\,\gamma\,\delta$.

Anmerkung. Als Typen der noch übrigen tetragonometrischen Aufgaben können genannt werden: $a b c \alpha_1 \beta_1$; $a b c \beta_1 \gamma_2$; $a b c \alpha \gamma_2$; $a b c \alpha_1 \delta_2$; $a b f \alpha_1 \gamma_2$; $a c \alpha \beta \delta_1$; $a c \alpha \beta_2 \gamma_1$; $a c \alpha \gamma_1 \delta_1$; $a c \alpha_2 \beta_2 \delta_2$; $a b \alpha_1 \beta_2 \gamma_2$; $a b \alpha \beta_2 \delta$; $a b \alpha_1 \gamma \delta_2$; $a b \alpha_1 \beta_1 \gamma$; $a b \alpha_1 \beta_1 \delta_1$.

B. Besondere Vierecke.

Die Aufgaben der Tetragonometrie vereinfachen sich meist wesentlich, wenn Vierecke einer besonderen Art (Parallelogramme, Trapeze, Sehnen-Vierecke u. s. w.) zu berechnen sind; die Anzahl der trigono-

metrisch bestimmten und daher kein weiteres Interesse bietenden Aufgaben vermehrt sich erheblich. Die Annahme anderweitiger Bestimmungsstücke, wie des Inhalts, der Summen von Seiten oder Diagonalen u. dgl. m. gestattet auch hier die Bildung einer grossen Menge nicht zu schwieriger, jedoch nicht durch die Fundamental-Aufgaben für das Dreieck unmittelbar zu lösender Aufgaben, von denen im Folgenden eine Auswahl gegeben wird.

a) Das Parallelogramm erfordert drei Bestimmungsstücke. Durch dieselben ist im Allgemeinen eines der Dreiecke bestimmt, in welche das Parallelogramm durch je eine Diagonale, oder eines der vier Dreiecke, in welche es durch seine beiden Diagonalen zugleich zerlegt wird.

Ein Parallelogramm zu berechnen, wenn gegeben sind:

1. Zwei aneinanderliegende Seiten und der Flächeninhalt. Zu vergl. §. 27, A. 11. $a = 764$, $b = 485$, $F = 369012$.

2. Eine Seite, ein Winkel und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 10. $a = 532$, $\alpha = 115^0\ 36'\ 30'',7$, $F = 244188$.

3. Die beiden Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 11. $e = 646$, $f = 72$, $F = 23256$.

4. Eine Diagonale, der Winkel der beiden Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 10. $e = 338$, $\varphi = 89^0\,31'\,14'',0$, $F = 14280$.

5. Zwei aneinanderliegende Seiten und der Winkel der Diagonalen. $a = 152$, $b = 345$, $\varphi = 47^0\ 33'\ 16'',6$.

6. Eine Seite, ein Winkel und der Winkel der Diagonalen. $a = 604$, $\alpha = 109^0\ 43'\ 53'',8$, $\varphi = 83^0\ 45'\ 25'',2$.

7. Eine Seite, eine Diagonale und der Flächeninhalt. cf. §. 27, A. 11. $a = 23$, $e = 32{,}5269$, $F = 529$.

8. Eine Seite, der Winkel der Diagonalen und der Flächeninhalt. cf. §. 27, B. 57. $a = 76$, $\varphi = 24^0\ 2'\ 9'',8$, $F = 27132$.

9. Eine Seite, der Winkel einer anliegenden Seite mit der durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt gehenden Diagonale und der Flächeninhalt. cf. §. 27, B. 57. $b = 273$, $\alpha_2 = 63^0\,31'\,8'',3$, $F = 37128$.

10. Eine Seite, eine Diagonale und der Winkel, welchen die andere Diagonale mit einer der ersteren Seite anliegenden Seite bildet. $a = 89$, $e = 160$, $\beta_2 = 64^0\ 0'\ 38'',8$.

11. Die beiden Diagonalen und ein Winkel. cf. §. 27, B. 112, $e = 154$, $f = 72$, $\alpha = 50^0\ 6'\ 54'',8$.

12. Die Differenz zweier aneinanderliegender Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. cf. §. 27, A. 51. $a - b = 191$, $\alpha = 165^0\ 23'\ 18'',5$, $e = 291$.

13. Der Umfang, ein Winkel und der Winkel der beiden Diagonalen. $u = 2322$, $\alpha = 136^0\ 59'\ 49'',7$, $\varphi = 76^0\ 8'\ 25'',8$.

b) Das gleichschenkelige Trapez (Antiparallelogramm) erfordert ebenfalls drei Bestimmungsstücke. Hilfsmittel zur Auflösung: Eine Parallele zu einer der nicht parallelen Seiten oder zu einer Diagonale durch einen Eckpunkt, der umbeschriebene Kreis. Das gleichschenkelige Trapez soll berechnet werden, wenn gegeben sind:

1. Die beiden parallelen (a, c) und eine nicht parallele Seite (b). $a = 1052$, $b = 269$, $c = 532$.

2. Die beiden parallelen Seiten und ein Winkel. $a = 244$, $c = 188$, $\alpha = 81^0\ 49'\ 43'',6$.

3. Die Differenz der parallelen Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. $a - c = 280$, $\alpha = 50^0\ 41'\ 32'',5$, $e = 555$.

4. Die Differenz der parallelen Seiten, die Höhe und eine Diagonale. $a - c = 616$, $h = 75$, $e = 939$.

5. Die beiden parallelen Seiten und eine Diagonale. $a = 484$, $c = 244$, $e = 365$.

6. Die beiden parallelen Seiten und der Winkel zwischen einer von ihnen und einer Diagonale. $a = 1052$, $c = 532$, $\alpha_2 = 4^0\ 58'\ 44'',7$.

7. Die Summe der parallelen Seiten, ein Winkel und eine Diagonale. $a + c = 432$, $\alpha = 81^0\ 49'\ 43'',6$, $e = 291$.

8. Der Flächeninhalt, die Höhe und eine der nicht parallelen Seiten. $F = 90288$, $h = 171$, $b = 221$.

9. Die beiden parallelen Seiten und der Winkel zwischen einer Diagonale und einer nicht parallelen Seite, welcher an einem Endpunkt der grösseren parallelen liegt. $a = 1244$, $c = 628$, $\alpha_1 = 9^0\ 6'\ 15'',6$.

10. Der in 9 genannte Winkel, die kleinere parallele Seite und die Höhe. $\alpha_1 = 8^0\ 26'\ 17'',5$, $c = 244$, $h = 27$.

c) Das allgemeine Trapez erfordert vier Bestimmungsstücke. Hilfsmittel: Die beiden unter b) genannten Parallelen,

Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zum Durchschnitt, die **Mittellinie**. Es seien gegeben:

1. Die vier Seiten. $a = 428$, $b = 289$, $c = 260$, $d = 257$.

2. Die parallelen, eine nicht parallele Seite und der der letzteren gegenüberliegende Winkel an der grösseren parallelen. $a = 1004$, $c = 696$, $b = 223{,}395$, $\alpha = 42^0\,44'\,28'',5$.

3. Die Differenz der parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite, die Diagonale, welche einen Endpunkt der letzteren mit einem Endpunkt der grösseren parallelen verbindet, und die Höhe. $a - c = 268$, $b = 255$, $e = 281$, $h = 231$.

4. Die parallelen Seiten, eine Diagonale und der spitze Winkel zwischen den Diagonalen. $a = 436$, $c = 12$, $e = 388{,}23$, $\varphi = 27^0\,32'\,35'',6$.

5. Die Summe der parallelen Seiten, eine nicht parallele Seite und die beiden Diagonalen. $a + c = 2820$, $b = 145$, $e = 1562{,}4$, $f = 1263$.

6. Der Flächeninhalt, die kleinere parallele Seite, die Höhe und der Winkel zwischen der grösseren parallelen Seite und einer Diagonale. $F = 87720$, $c = 260$, $h = 255$, $\beta_1 = 32^0\,46'\,44'',7$.

7. Die parallelen Seiten und die beiden Winkel an der grösseren derselben. $a = 1004$, $c = 696$, $\alpha = 42^0\,44'\,28'',5$, $\beta = 67^0\,54'\,46'',7$.

8. Die parallelen Seiten, der Winkel zwischen der grösseren derselben und einer Diagonale und der spitze Winkel zwischen den Diagonalen. $a = 436$, $c = 12$, $\beta_1 = 58^0\,6'\,33'',2$, $\varphi = 78^0\,27'\,28'',6$.

9. Die grössere parallele und eine nicht parallele Seite, die Summe der beiden anderen Seiten und diejenige Diagonale, welche zwei Endpunkte der letzteren verbindet. $a = 268$, $b = 255$, $c + d = 281$, $e = 281$.

10. Die Differenz der parallelen Seiten, die Differenz der nicht parallelen Seiten, die Differenz der Winkel an der grösseren parallelen Seite und die den grösseren Winkel theilende Diagonale. $a - c = 532$, $d - b = 280$, $\beta - \alpha = 25^0\,3'\,27'',4$, $e = 1562{,}4$.

11. Die Summe der grösseren parallelen und der beiden nicht parallelen Seiten, vermindert um die kleinere parallele, die

zwei Winkel an der grösseren parallelen und eine Diagonale. $s = 714$, $\alpha = 82^0\,50'\,50'',4$, $\beta = 61^0\,55'\,39'',1$, $e = 307,936$.

12. Eine der parallelen Seiten, der von ihr mit einer Diagonale gebildete Winkel, der spitze Winkel der Diagonalen und die Summe der Diagonalen. $a = 1004$, $\beta_1 = 14^0\,51'\,46'',2$, $\varphi = 27^0\,32'\,35'',6$, $e + f = 1750$.

13. Der Umfang, die Höhe und zwei einander gegenüberliegende Winkel. $u = 978$, $h = 135$, $\alpha = 20^0\,58'\,58'',6$, $\gamma = 118^0\,4'\,20'',9$.

d) Das Sehnen-Viereck erfordert vier unabhängige Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Drei Seiten und der Radius des umbeschriebenen Kreises. $a = 56$, $b = 33$, $c = 16$, $r = 32,5$.

2. Zwei aneinanderliegende Seiten, ein der einen von diesen anliegender (nicht eingeschlossener) Winkel und der Radius. $a = 84$, $b = 13$, $\alpha = 33^0\,51'\,18'',1$, $r = 42,5$.

3. Zwei gegenüberliegende Seiten, ein Winkel und der Radius. $a = 14$, $c = 13$, $\alpha = 106^0\,15'\,36'',8$, $r = 8,125$.

4. Zwei gegenüberliegende Seiten, die Summe zweier an einer nicht gegebenen Seite liegenden Vierecks-Winkel und der Radius. $a = 56$, $c = 16$, $\beta + \gamma = 225^0\,14'\,23'',1$, $r = 32,5$.

5. Die beiden Diagonalen, der von ihnen eingeschlossene Winkel und der Radius. $e = 9$, $f = 6$, $\varphi = 60^0$, $r = 4,89164$.

6. Zwei aneinanderliegende Seiten, die von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und der an diesem Eckpunkt liegende Winkel. $a = 84$, $b = 13$, $f = 47,353$, $\beta = 90^0$.

7. Zwei aneinanderliegende Seiten und die beiden Diagonalen. $a = 14$, $b = 13$, $e = 15$, $f = 15,6$.

8. Zwei gegenüberliegende Seiten, eine Diagonale und ein von dieser nicht durchschnittener Winkel. $a = 56$, $c = 16$, $e = 65$, $\beta = 90^0$.

9. Drei der Abschnitte, in welche die Diagonalen einander theilen, und eine Seite. $e_1 = e_2 = f_1 = 174,5$, $a = 180$.

10. Zwei einander gegenüberliegende Seiten, die Verlängerung der einen bis zum Durchschnitt E mit der Verlängerung der anderen und eine dritte Seite. $a = 84$, $c = 36$, $BE = p = 8,7208$, $b = 13$.

11. Drei Seiten und das Product der beiden Diagonalen. $a = 14$, $b = 13$, $c = 13$, $e.f = 234$.

12. Drei der Abschnitte, in welche die Diagonalen einander theilen und der durch den vierten Abschnitt getheilte Vierecks-Winkel. $e_1 = 1$, $e_2 = 8$, $f_1 = 4$, $\delta = 79^0\ 48'\ 9'',4$.

e) **Das Tangenten-Viereck** erfordert ebenfalls vier Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite, ein anliegender Winkel, die diesem gegenüberliegende Diagonale und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 65$, $\beta = 118^0\ 58'\ 46'',4$, $e = 112$, $\varrho = 28\frac{28}{65}$.

2. Zwei aneinanderliegende Seiten, der eingeschlossene Winkel und der Radius des Kreises. $a = 89,6$, $b = 42$, $\beta = 73^0\ 44'\ 23'',2$, $\varrho = 24$.

3. Drei Seiten und eine Diagonale. $a = b = 5,7735$, $c = e = 10$.

4. Zwei aneinanderliegende Seiten, die nicht von demselben Eckpunkt ausgehende Diagonale und ein von dieser getheilter Vierecks-Winkel. $a = 75$, $b = 58$, $e = 51,8556$, $\alpha = 77^0\ 19'\ 10'',6$.

5. Zwei aneinanderliegende Seiten und die der einen von ihnen anliegenden Winkel. $a = 201,732$, $b = 74$, $\alpha = 46^0\ 46'\ 30'',6$, $\beta = 87^0\ 12'\ 20'',2$.

Ebenso, wenn eins der Bestimmungsstücke durch die Bedingung ersetzt wird, dass das Viereck zugleich ein Trapez sein soll und ausserdem gegeben sind:

6. Die nicht parallelen Seiten und der Radius des Kreises. $b = 293$, $d = 925$, $\varrho = 142,5$.

7. Die Summe der parallelen, eine der anderen Seiten und der Radius des Kreises. $a + c = s = 296$, $b = 101$, $\varrho = 49,5$.

8. Die kleinere parallele, eine nicht parallele Seite und der Radius des Kreises. $c = 24$, $b = 58$, $\varrho = 20$.

f). **Das Kreis-Viereck**, in und um welches sich ein Kreis beschreiben lässt, erfordert **drei** Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. $a = 212,4222$, $\alpha = 116^0\ 13'\ 6'',4$, $\beta = 16^0\ 20'\ 32'',8$.

2. Der Radius des einbeschriebenen Kreises, eine Seite und ein ihr anliegender Winkel. $\varrho = 120$, $a = 448$, $\alpha = 73^0 44' 23'',2$.

3. Eine Seite, ein ihr gegenüberliegender Winkel und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 49{,}0205$, $\gamma = 116^0 13' 6'',4$, $\varrho = 28$.

4. Eine Seite, der Radius des einbeschriebenen Kreises und der Flächeninhalt. $a = 448$, $\varrho = 120$, $F = 70560$.

g) Das Deltoid, d. h. ein Viereck, in welchem zwei aneinanderliegende Seiten gleich und die beiden anderen ebenfalls einander gleich sind, erfordert drei Bestimmungsstücke. Es seien gegeben:

1. Eine Seite, die halbirte Diagonale und der Radius des einbeschriebenen Kreises. $a = 29$, $e = 42$, $\varrho = 18\frac{1}{2}\frac{5}{6}$.

2. Die Summe der halbirten Diagonale und einer Seite, der Winkel, welcher diese Seite und die gleiche zu Schenkeln hat und die halbirende Diagonale. $a + e = s = 911$, $\beta = 18^0 32' 30'',8$, $f = 2732$.

3. Eine Seite und die Linien, welche den Halbirungspunkt derselben mit den Halbirungspunkten der beiden anliegenden verbinden. $a = 225$, $e' = 231$, $f' = 314$, e' zwischen den gleichen Seiten.

4. Eine Seite und die vom Durchschnittspunkt der Diagonalen auf die Seiten gefällten Perpendikel. $a = 128{,}0303$, $p_a = 56$, $p_c = 25$.

5. Der Winkel zwischen den grösseren Seiten und die Unterschiede zwischen der halbirten Diagonale und jeder der Seiten. $e - a = d_1 = 327$, $e - c = d'' = 253$, $\delta = 102^0 50' 23'',4$.

6. Einer der ungleichen Winkel, eine nicht anliegende Seite und die Summe der Diagonalen. $\beta = 92^0 47' 39'',8$, $c = 75$, $e + f = s = 134$.

7. Einer der ungleichen Winkel, eine anliegende Seite und das Verhältniss der Diagonalen. $\beta = 18^0 32' 30'',8$, $a = 689$, $e : f = m : n = 111 : 1366$.

8. Eine Seite, der Flächeninhalt und das Verhältniss der Diagonalen. $a = 375$, $F = 144612$, $e : f = m : n = 351 : 206$.

C. Lehrsätze über Vierecke.

1. Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vierecks ist gleich dem Quadrate der Fläche eines Sehnenvierecks mit denselben

Seiten, vermindert um das Product aller vier Seiten in das Quadrat des Cosinus der halben Summe zweier Gegenwinkel des ersteren Vierecks.

2. Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines Sehnen-Vierecks $ABCD$, bis sie sich schneiden, nämlich BA über A und CD über D bis E, sowie BC über C, AD über D bis F, und zieht man vom Mittelpunkt O aus die Geraden OE, OF, OD, so ist $OE \,.\, OF \,.\, \cos EOF = OD^2$.

3. Bilden in einem Sehnen-Viereck die vier Seiten AB, BC, CD, DA in dieser Reihenfolge eine geometrische Progression, deren Exponent n ist, so ist

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BCD - ABC) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BCD + ABC) = (n^2 - 1)^2 : (n^2 + 1)^2.$$

4. In jedem Tangenten-Viereck verhalten sich die Quadrate der Sinus der Hälften je zweier Gegenwinkel umgekehrt wie die Producte der einschliessenden Seiten.

5. In jedem Viereck im engeren Sinne ist das Product der Sinus von vier durch die Diagonalen entstandenen Theilen der Winkel, von welchen keine zwei an demselben Eckpunkt liegen, gleich dem Product der Sinus der vier anderen.

6. In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten, vermindert um die Summe der Quadrate der beiden anderen Gegenseiten gleich dem doppelten Product der beiden Diagonalen und des Cosinus eines von diesen eingeschlossenen Winkels.

7. Der Flächeninhalt eines jeden Tangenten-Vierecks ist gleich dem doppelten Product aus der Tangente des Winkels der Diagonalen in die Differenz der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

8. Construirt man aus je zwei Gegenseiten eines Sehnen-Vierecks und dem stumpfen Winkel der Diagonalen, letzterem als eingeschlossenem Winkel, ein Dreieck, so sind die dritten Seiten dieser Dreiecke einander gleich.

9. In jedem Sehnenviereck verhalten sich je zwei Gegenseiten wie die bezüglich mit ihnen und mit derselben dritten Seite von demselben Eckpunkt ausgehenden Abschnitte der Diagonalen.

10. Zieht man in einem Trapez durch einen Endpunkt der kleineren parallelen Seite zwei Linien nach der grösseren,

von denen die eine der anliegenden nicht parallelen Seite gleich, die andere der gegenüberliegenden nicht parallelen Seite parallel ist, so schneiden diese beiden Linien auf der grösseren parallelen Seite eine Strecke ab, welche sich zur Summe der Diagonalen verhält, wie die Differenz der Diagonalen zur Summe der parallelen Seiten.

§. 30. Polygonometrie.

A. Berechnung von Polygonen durch Zerlegung in Dreiecke.

1. Von einem Fünfeck seien vier aufeinanderfolgende Seiten a, b, c, d und die von ihnen eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich α, β, γ gegeben; man soll die fünfte Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel berechnen. $a = 12$, $b = 8$, $c = 13$, $d = 25$, $\alpha = 124^0\ 12'\ 6''$, $\beta = 132^0\ 17'\ 18''$, $\gamma = 87^0\ 12'\ 36''$.

2. Von einem Sechseck seien fünf aufeinanderfolgende Winkel α, β, γ, δ, ε und die von diesen eingeschlossenen Seiten der Reihe nach gleich a, b, c, d gegeben; man soll die drei übrigen Stücke berechnen. $\alpha = 150^0\ 12'\ 10''$, $\beta = 85^0\ 16'\ 30''$, $\gamma = 132^0\ 9'\ 48''$, $\delta = 150^0\ 17'\ 42''$, $\varepsilon = 105^0\ 33'\ 22''$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

3. Von einem Punkte O im Innern eines Siebenecks aus sind die nach den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G desselben gehenden Geraden $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, u. s. w. nebst den von je zwei benachbarten derselben eingeschlossenen Winkeln $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, u. s. w. gemessen; man berechne die Seiten und die Winkel, sowie den Flächeninhalt des Polygons. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $d = 44$, $e = 39$, $f = 44$, $g = 37$, $\alpha = 67^0\ 22'\ 48'',5$, $\beta = 53^0\ 7'\ 48'',4 = \gamma$, $\delta = 22^0\ 37'\ 11'',5$, $\varepsilon = 51^0\ 7'\ 11'',7$, $\zeta = 18^0\ 55'\ 28'',7$, $\eta = 93^0\ 41'\ 42'',8$.

4. Behufs Bestimmung der gegenseitigen Lage von sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G sind dieselben durch ein zusammenhängendes Netz von Dreiecken verbunden worden, und man hat die Entfernung $AB = 960$ als Standlinie und ausserdem die Dreieckswinkel $BAC = 5^0\,27'\,9'',5$, $CBA = 46^0\,23'\,49'',9$, $DBC = 124^0\,58'\,33'',6$, $CDB = 11^0\,25'\,16'',3$, $EDC = 8^0\,10'\,16'',4$, $CED = 139^0\,56'\,16'',8$, $FEC = 88^0\,37'\,10'',0$, $GEF = 14^0\,15'\,0'',1$, $FGE = 28^0\,4'\,20'',9$, $EFG = 137^0\,40'\,39'',0$, $CFE = 59^0\,29'\,23'',2$,

$ECF = 31^0 53' 26'',8$, $DCE = 31^0 53' 26'',8$, $BCD = 43^0 36' 10'',1$, $ACB = 128^0\ 9'\ 0'',6$ gemessen. Man berechne die Seiten der betreffenden Dreiecke.

5. Von einem Fünfeck $ABCDE$ sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $DE = d$, $EA = e$ und die Winkel $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $DEA = \varepsilon$ gemessen; man berechne die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben. $a = 209$, $b = 241$, $d = 442$, $e = 120$, $\beta = 29^0\ 51'\ 46'',0$, $\gamma = 150^0\ 8'\ 14'',0$, $\varepsilon = 90^0$.

6. Aus den Winkeln eines in einen Kreis beschriebenen Fünfecks und dem Radius dieses Kreises die Seiten und den Flächeninhalt des Fünfecks zu berechnen.

7. Von einem Fünfeck $ABCDE$ seien gegeben $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle AEB = \alpha_1$, $BED = \beta_1$, $BDE = \gamma_1$, $BDC = \delta_1$. Man berechne die übrigen Stücke des Fünfecks. (Bestimme zunächst die Winkel A und C aus ihrer Summe und dem Verhältniss ihrer Sinus, bezw. $A - C$.) $a = 34$, $b = 104$, $\beta = 284^0\ 24'\ 22'',2$, $\alpha_1 = 14^0\ 15'\ 0'',1$, $\beta_1 = 59^0\ 29'\ 23'',2$, $\gamma_1 = 31^0\ 53'\ 26'',8$, $\delta_1 = 59^0\ 57'\ 47'',7$.

B. Berechnung von Polygonen durch die Coordinaten-Methode. (Polygonometrie.)

Vorbemerkung: Man bezeichne die Eckpunkte des n-Ecks der Reihe nach durch $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n-1}, P_n$, die Winkel an denselben bezüglich durch $w_1, w_2, w_3, \ldots w_{n-1}, w_n$, die Seiten $P_1 P_2$, $P_2 P_3, \ldots P_{n-1} P_n$, $P_n P_1$ bezüglich durch $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s_n$.

1. In einem Polygone (Fünfeck) seien mit Ausnahme einer Seite und der beiden anliegenden Winkel alle übrigen Stücke gemessen; man berechne jene drei Stücke.

2. In einem Polygone (Sechseck) seien alle Winkel mit Ausnahme eines einzigen und alle Seiten mit Ausnahme von zwei aneinanderliegenden gemessen; man berechne die fehlenden Stücke.

3. In einem Fünfeck seien die Seiten s_1, s_2, s_4 und die Winkel w_1, w_3, w_4, w_5 gemessen; die fehlenden Stücke sollen berechnet werden.

4. Zwei aneinanderliegende Winkel eines n-Ecks (Sechsecks) und eine Seite, welche zwischen einem dieser Winkel und einem der anderen liegt, sowie den Flächeninhalt des Polygons aus den übrigen Stücken desselben zu berechnen.

5. Von einem Sechseck seien die Seiten s_2, s_3, s_4, s_5 und die Winkel w_1, w_2, w_4, w_6 gemessen; man berechne dasselbe.

6. Aus den gegebenen Seiten eines Polygons (Siebenecks) und den bis auf drei aufeinanderfolgende gegebenen Winkeln desselben die nicht gegebenen Stücke zu berechnen.

7. Ein Fünfeck aus den Seiten s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und den Winkeln w_1, w_4 zu berechnen.

8. Aus den Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ u. s. w. der Eckpunkte eines Polygons (Achtecks) die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

Zahlenbeispiele zu den Aufgaben B. 1—8.

a.

$s_1 = 401$	$w_1 = 84^0 16' 30'',7$	$x_1 = 0$	$y_1 = 0$
$s_2 = 365$	$w_2 = 107.44.34,2$	$x_2 = +40$	$y_2 = +399$
$s_3 = 113$	$w_3 = 85.36.36,4$	$x_3 = +397$	$y_3 = +475$
$s_4 = 388\frac{25}{32}$	$w_4 = 151.23.20,1$	$x_4 = +412$	$y_4 = +363$
$s_5 = 272\frac{25}{32}$	$w_5 = 110.58.58,6$	$x_5 = +272\frac{25}{36}$	$y_5 = 0$

$F = 183203\frac{7}{72}$.

b.

	s	w	x	y
1	13	$112^0 37' 11'',5$	0	0
2	17	50.41.32,4	− 5	+ 12
3	25	135.40. 2,4	+ 10	20
4	$20\frac{2}{3}$	170.16.15,5	34	13
5	$60\frac{2}{3}$	25.59.21,2	$60\frac{2}{3}$	0

$F = 779\frac{1}{3}$.

c.

	s	w	x	y
1	317	$103^0 41' 8'',0$	0	0
2	229	91.30.13,4	− 75	+ 308
3	365	160.34. 6,7	+ 146	368
4	541	43.18.55,8	510	341
5	90	140.55.36,1	90	0

$F = 120576$.

d.

	s	w	x	y
1	29	$133^0 36' 10'',1$	0	0
2	41	59. 4.39,3	− 20	+ 21
3	10	167.19.10,6	+ 20	30
4	37	161. 4.31,3	30	30
5	30	55.47.40,3	65	18
6	41	143. 7.48,4	41	0

$F = 2542$.

e.

	s	w	x	y
1	61	$79^0 36' 40'',0$	0	0
2	53	132.16.46,8	+ 11	+ 60
3	85	139.18.42,5	56	88
4	65	113. 2.50,8	140	75
5	12	165.44.59,9	156	12
6	156	90. 0. 0,0	156	0

$F = 11202$.

f.

	s	w	x	y
1	125	110° 36′ 34″,9	0	0
2	173	141. 53. 52,7	− 44	+ 117
3	197	25. 39. 48,8	+ 8	282
4	65	292. 20. 20,4	36	87
5	125	43. 13. 46,5	92	120
6	57	106. 15. 36,7	57	0

$F = 16896.$

g.

	s	w	x	y
1	325	83° 38′ 25″,2	0	0
2	257	13. 30. 44,4	+ 36	+ 323
3	109	319. 26. 55,8	68	68
4	101	21. 58. 38,3	128	159
5	76,9	230. 8. 21,1	108	60
6	156,1	51. 16. 55,2	156,1	0

$F = 15971.$

h.

	s	w	x	y
1	401	5° 35′ 6″,5	0	0
2	61	106. 6. 49,3	+ 391	+ 40
3	17	141. 32. 19,1	402	100
4	41	130. 45. 10,3	394	115
5	257	160. 10. 1,0	354	124
6	89	123. 8. 30,8	99	92
7	61,188 23	232. 42. 3,0	60	12

$F = 26018.$

Azimuth von P_1 (d. h. Winkel zwischen $P_2 P_1$ und der hier durch P_1 gehenden positiven Richtung der Abscissenaxe) $\alpha = 5^0\ 43'\ 29'',3$.

i.

	s	w	x	y
1	$9\frac{2}{3}$	117° 20′ 33″,4	0	− 7
2	$64\frac{1}{2}$	136. 23. 49,9	+ $6\frac{2}{3}$	0
3	$6\frac{5}{6}$	77. 19. 10,6	+ $6\frac{2}{3}$	+ $64\frac{1}{2}$
4	13	260. 3. 37,9	0	+ 63
5	37	93. 41. 42,8	− 5	+ 75
6	65	94. 40. 28,6	− 40	+ 63
7	25	120. 30. 36,8	− 24	0

$F = 2788\frac{1}{3}.$

Die Axe der x geht durch P_7 und P_2, die Axe der y durch P_1 und P_4.

k.

	x	y	s	w
1	0	0	205	148° 39′ 28″,1
2	+ 187	+ 84	85	89. 7. 54,9
3	151	161	61	215. 26. 47,4
4	162	221	30	79. 36. 40,0
5	132	221	89	115. 59. 21,2
6	93	141	54	244. 0. 38,8
7	39	141	25	270. 0. 0,0
8	39	166	17	118. 4. 20,9
9	+ 24	174	53	273° 49′ 5″,9
10	52	219	265	36. 52. 11,7
11	− 195	123	109	144. 38. 16,1
12	− 255	32	257	63. 45. 15,0

Azimuth von P_1, oder $\sphericalangle\ P_2 P_1 X = \alpha = 24^0\ 11'\ 22'',3$; $F = 55613$.

1.

	x	y	s	w		x	y	s	w
1	+ 0	+ 0	210,6	90° 0′ 0″,0	13	+ 83,5	+ 57,6	37,3	227°29′56″,4
2	210,6	0	14,5	46.23.49,9	14	58,3	85,1	12	312.30. 3,6
3	200,6	10,5	14	223.36.10,1	15	70,3	85,1	35,8	90. 0. 0,0
4	200,6	24,5	14,5	223.36.10,1	16	70,3	120,9	12	90. 0. 0,0
5	210,6	35	42,5	55.11.40,6	17	58,3	120,9	49,3	108.19.28,9
6	168,6	41,5	42,5	162.24.18,6	18	42,8	74,1	8	251.40.31,1
7	126,6	35	14,5	55.11.40,6	19	34,8	74,1	20	90. 0. 0,0
8	136,6	24,5	14	223.36.10,1	20	34,8	54,1	2	270. 0. 0,0
9	136,6	10,5	12	270. 0. 0,0	21	32,8	54,1	39,7	125. 3. 4,1
10	124,6	10,5	30,5	227.15.31,5	22	10	21,6	10	234.56.55,9
11	103,9	32,9	26,5	243.58.50,0	23	0	21,6	21,6	90. 0. 0,0
12	113,5	57,6	30	68.45.38,5					

$F = 10058,14.$

Anhang 5: **Vermischte Aufgaben**

zur Repetition aus den verschiedenen bisher behandelten Gebieten.

1. $\sin 10^0 = 2 \,.\, \sin 35^0 \,.\, \cos 25^0 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

2. $\sin 10^0 = 2 \,.\, \sin 20^0 \,.\, \cos 10^0 - \frac{1}{2}.$

3. $\sin 10^0 = 2 \,.\, \sin 23^0 \,.\, \cos 13^0 - \sin 36^0.$

4. Ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, so ist $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4 \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma.$

5. Zwischen den drei Winkeln eines Dreiecks besteht die Gleichung:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\beta \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\gamma - 1.$$

6. a) $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha = -4\sin\alpha \,.\, \cos 2\alpha \,.\, \cos 4\alpha.$

b) $\sin\alpha - \sin(2n+1)\alpha + \sin(4n+1)\alpha - \sin(6n+1)\alpha = -4\sin n\alpha \,.\, \cos 2n\alpha \,.\, \cos(3n+1)\alpha.$

7. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta) = \sin\frac{n+1}{2}\beta \,.\, \sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right) : \sin\frac{1}{2}\beta.$

Folgende Gleichungen aufzulösen:

8. $3 \,.\, \sin x^2 - 4 \,.\, \cos x^2 = 3{,}5 \,.\, \sin 2x.$

9. $\sin x^4 + \cos x^4 = 2 \,.\, \sin 2x.$

10. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \operatorname{cotg} x^2 = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{tang} 2x$.

11. $2 + 3 \,.\, \operatorname{cotg} 2x = 4 \,.\, \operatorname{tang} x$.

12. $-\sin(x - a) + \sin(2x + a) = \sin(x + a) - \sin(2x - a)$.

13. $x - y = \arcsin \frac{1}{10}$; $\frac{\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2}{\sin x^2 \cos y^2 - \cos x^2 \sin y^2} = \frac{5}{3}$.

14. $x - y = 7^0\, 18'$;
$\sin x^2 \,.\, \sin y^2 = \operatorname{cotg} 36^0\, 17'\, 2'' \,.\, \operatorname{cotg} 82^0\, 10'\, 59'',6$.

15. $\cos x : \cos y = 3 : 4$; $\cos(x - y) = 0{,}96$.

16. $\sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + \sin x^4 =$
$\cos x + \cos x^2 + \cos x^3 + \cos x^4$.

17. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu berechnen aus einer Kathete a und dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises. $a = 396{,}467$, $\varrho = 117{,}319$.

18. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe s seiner Seiten und der Summe S der Quadrate derselben zu berechnen. $s = 132$, $S = 6050$.

19. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe s seiner Katheten zu berechnen, wenn das Product der Katheten gleich der Differenz ihrer Quadrate ist.

20. Ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gleich dem Doppelten der anderen Kathete ist, aus dieser letzteren zu berechnen.

21. Die Winkel eines gleichschenkeligen Dreiecks zu berechnen, in welchem die Hälfte der Grundlinie gleich dem grösseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt getheilten Schenkels ist.

22. Den Radius eines Kreises zu berechnen, dessen Peripherie gleich dem Umfang eines gleichschenkeligen Dreiecks ist, von dem der Schenkel gleich $a = 18{,}1687$ und der Winkel an der Spitze gleich $\beta = 93^0\, 37'\, 53''$ ist.

23. Einen Rhombus aus einem Winkel α und der Summe s der Diagonalen zu berechnen. $\alpha = 63^0\, 15'\, 4''$, $s = 26{,}4$.

24. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Höhe auf die Hypotenuse und der zu einer Kathete gehörigen Mittellinie zu berechnen.

25. Von drei Geraden schneiden sich die erste und die zweite unter dem spitzen Winkel α, die zweite und dritte unter

dem spitzen Winkel β, die dritte und erste unter dem spitzen Winkel γ. Eine Strecke m der ersten Geraden ist auf die zweite projicirt, die Projection dann auf die dritte, die zweite Projection auf die erste, die dritte Projection auf die zweite Gerade projicirt, u. s. f. bis in's Unendliche. Welches ist die Summe von m und allen Projectionen?

26. Beweise mittelst des Radius des einbeschriebenen Kreises, dass $\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

27. Ein Parallelogramm aus der Summe s zweier aneinanderliegender Seiten, einer Diagonale c und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel β zu berechnen. $s = 621$, $c = 327$, $\beta = 63^0\ 31'\ 8'',3$.

28. Den Flächeninhalt eines Segments zu berechnen, dessen Sehne gleich $\frac{1}{7}$ der Peripherie ist, wenn der Flächeninhalt des Kreises gleich F gegeben ist. $F = 2638$.

29. In einem Dreieck ist von einem Eckpunkt aus eine Transversale gezogen, welche den betreffenden Winkel in die Theile v und w und die Gegenseite entsprechend in die Abschnitte p und q theilt. Man berechne das Dreieck aus diesen Stücken. $p = 36$, $q = 50$, $v = 3'\ 40''$, $w = 5'$.

30. Ueber der Grundlinie eines Dreiecks, dessen beide andere Seiten $a = 5$, $b = 6$ sind, ist nach aussen ein Halbkreis construirt. Wie gross muss der Winkel γ an der Spitze sein, wenn der Inhalt des Dreiecks sich zu dem des Halbkreises wie $3 : 4$ verhalten soll?

31. Ein Quadrat, dessen Seite gleich a ist, sei gleich einem gleichschenkeligen Dreieck, in welchem die Summe der Basis und der Höhe auf derselben doppelt so gross als ein Schenkel ist. Man berechne das Dreieck. $a = 3$.

32. Die Diagonale eines regelmässigen Fünfecks sei $d = 8$; man berechne seinen Flächeninhalt und seinen Umfang.

33. Von einem Fünfeck $ABCDE$ sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und die Winkel $EAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $CDE = \delta$ gegeben; man berechne die drei fehlenden Stücke und den Flächeninhalt. α) $a = 14$; $b = 15$; $c = 5$; $\alpha = 101^0\ 25'\ 16'',3$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48'',4$; $\gamma = 126^0\ 52'\ 11'',6$;

$\delta = 133^0\,36'\,10'',1$. β) $a = 39$; $b = 65$; $c = 20$; $\alpha = 202^0\,37'11'',5$; $\beta = 53^0 7'48'',4$; $\gamma = 104^0 15'0'',1$; $\delta = 138^0 53'16'',5$.

34. Von einem Sechseck $ABCDEF$ seien die Seiten $AB = 37$, $BC = 13$, $CD = 17$, $DE = 51$, $EF = 150$ und die Winkel $B = 93^0\,41'\,42'',8$; $C = 148^0\,34'\,57'',8$; $D = 151^0\,55'\,39'',0$; $E = 160^0\,56'\,43'',5$ gegeben. Man berechne die übrigen drei Stücke und den Flächeninhalt.

35. Innerhalb eines Quadrates ist von jedem seiner Eckpunkte aus eine Transversale gezogen, sodass jede derselben mit einer anliegenden, und zwar jede andere mit einer anderen Seite denselben gegebenen Winkel α bildet. Die vier Transversalen schliessen dann ein kleineres Quadrat ein. Wie verhält sich der Flächeninhalt des letzteren zu dem des ersteren?

36. Ein Quadrat ist einem anderen so einbeschrieben, dass seine Eckpunkte auf den Seiten des letzteren liegen; sein Flächeninhalt verhält sich zu dem des anderen, wie $m:n$. Welche Winkel bilden seine Seiten mit denen des anderen? $m:n = 1:2$. Welches der einbeschreibbaren Quadrate ist das kleinste?

37. In der Figur des bekannten Euclid'schen Beweises des pythagoreischen Lehrsatzes sind zur Construction von zwei Paaren congruenter Dreiecke, von denen jedes halb so gross ist, als eines der Quadrate der Katheten, vier Verbindungslinien gezogen. Wie lang sind diese und welche Winkel bilden sie mit den Seiten des Dreiecks? Gegeben sind die Katheten a, b.

38. Die vier Seiten eines Vierecks seien der Reihe nach gleich 33; 63; 16; 56, und der Winkel zwischen der ersten und vierten Seite sei dem Winkel zwischen der zweiten und dritten gleich. Man berechne die beiden anderen Winkel, die Diagonalen und den Flächeninhalt des Vierecks.

39. Von einem Punkte P gehen vier gerade Linien aus, deren Längen der Reihe nach gleich c, d, e, f gegeben sind. Ausserdem sind die Winkel $c/d = \alpha$, $d/e = \beta$, $e/f = \gamma$ gegeben. Welche Beziehungen müssen zwischen den gegebenen Grössen bestehen, wenn die Verbindungslinien der Endpunkte der vier Geraden ein Rechteck begrenzen sollen?

40. Im Innern eines Quadrats ist ein Punkt angenommen, dessen Verbindungslinien mit den Eckpunkten des Quadrats bezüglich die Längen b, c, d, e haben. Wie gross ist die Seite

des Quadrats? Welche Bedingungsgleichung zwischen b, d, c, e muss erfüllt sein? Welche Winkel bilden die Verbindungslinien mit den Seiten?

41. In einer Seite AB eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D angenommen, dessen Abstände von den Seiten AC, BC bezüglich gleich h und k gegeben seien. Ausserdem seien die Winkel des Dreiecks gemessen. Man berechne den Inhalt des Parallelogramms, welches durch zwei von D aus zu AC, bezw. BC gezogene Parallelen entsteht, und die Winkel an der Diagonale DC desselben.

42. Vom Fusse A eines Thurmes aus sei in der Horizontalebene desselben eine Strecke $AB = a$ und weiterhin auf ihrer Verlängerung über B eine eben so grosse Strecke BC abgemessen; die letztere erscheine an der Spitze des Thurmes unter dem Sehwinkel α. Wie hoch ist der Thurm? $a = 100$, $\alpha = 14^0\,2'$.

43. Um die Höhe des kaiserlichen Schlosses in Berlin zu bestimmen, wurde zunächst auf dem flachen Dache die Länge der vorspringenden Portalfront (Nr. 1) AB durch zweimalige Messung, $c = 16^m,474$ und $16^m,475$ bestimmt. In einem Standpunkt P auf dem Schlossplatz wurde der Höhenwinkel von A, $\sphericalangle APA' = \alpha = 18^0\,34\frac{5}{8}'$, und der von B, $\sphericalangle BPB' = \beta = 16^0\,28\frac{1}{8}'$, endlich der von den horizontalen Schenkeln eingeschlossene Winkel $A'PB' = \gamma = 7^0\,22\frac{1}{2}'$ gemessen. Die Queraxe des Theodoliten befand sich $h = 1^m,055$ über der Erweiterung der Ebene des Trottoirs neben dem Portal Nr. 2. Wie hoch ist das Schloss am Portal Nr. 1 über dieser Grundebene am Schlossplatz?

44. Die Höhen zweier durch ein Thal getrennten Bergspitzen über dem Niveau des Thales sind bezüglich $h_1 = 576$ und $h_2 = 2486$, die directe Entfernung der beiden Gipfelpunkte $S_1 S_2$ ist $d = 2486$. Im Thale soll ein Punkt X in der durch die Gipfel gehenden Vertikalebene bestimmt werden, in welchem dieselben unter gleichem Elevationswinkel α erscheinen. Man berechne α, $S_1 X$, $S_2 X$.

45. In dem einem gegebenen Dreieck umbeschriebenen Kreise seien die Durchschnittspunkte der Peripherie mit den Verlängerungen der Höhen zu Eckpunkten eines neuen Dreiecks angenommen. Man berechne die Winkel, die Seiten, den Flächeninhalt, u. s. w. des letzteren mittelst der entsprechenden Stücke des gegebenen, bezw. man gebe die zwischen den Stücken der beiden Dreiecke bestehenden Beziehungen an.

46. Ebenso für dasjenige Dreieck, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte der Seiten des ursprünglichen mit dem ihm einbeschriebenen Kreise sind.

47. Ebenso für das Dreieck, dessen Eckpunkte die kleineren Bogen zwischen den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises halbiren.

48. In den Eckpunkten eines gegebenen spitzwinkeligen Dreiecks seien auf den anliegenden Seiten Senkrechte errichtet; es entsteht ein Sechseck, dessen Eigenschaften mit Beziehung auf jenes Dreieck untersucht werden sollen.

Anhang 6: **Aufgaben über Maxima und Minima zu trigonometrischer Lösung.**

1. Von allen Rechtecken mit gegebener Diagonale dasjenige zu bestimmen, welches den grössten Umfang hat.

2. Ebenso dasjenige Rechteck, welches eine gegebene Diagonale und einen möglichst grossen Flächeninhalt hat.

Umgekehrt: unter allen Rechtecken von gegebenem Inhalt dasjenige zu bestimmen, dessen Diagonale ein Minimum ist. Bildung entsprechender Umkehrungen zu den folgenden Aufgaben.

3. Ein Parallelogramm von möglichst grossem Flächeninhalt zu bestimmen, wenn die beiden Diagonalen desselben gegeben sind.

4. Von einem Viereck, in welchem zwei Seiten parallel und die beiden anderen einander gleich sind, sei die Summe der parallelen Seiten und eine Diagonale gegeben. Man bestimme dieses Viereck so, dass sein Flächeninhalt ein Maximum werde.

5. In einen Kreissector ein Parallelogramm zu beschreiben, welches den Winkel am Centrum mit jenem gemeinsam habe, dessen einer Eckpunkt auf dem Bogen liege, und dessen Flächeninhalt möglichst gross sei.

6. Von allen Dreiecken, welche eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Spitze haben, dasjenige zu bestimmen, welches den grössten Umfang hat.

7. In einem Kreise sei auf einem Radius vom Mittelpunkt C aus eine Strecke CB abgeschnitten; man bestimme den grössten unter denjenigen Peripheriewinkeln dieses Kreises, deren Schenkel bezüglich durch die Punkte B und C gehen.

8. Von allen Dreiecken, welche dieselbe Summe zweier Seiten und dieselbe dritte Seite haben, dasjenige zu bestimmen, in welchem der letzteren der grösste Winkel gegenüberliegt.

9. Das grösste von allen Dreiecken zu bestimmen, welche einen gegebenen Umfang und einen gegebenen Winkel haben.

10. Einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel in einen gegebenen Kreis so einzutragen, dass die Summe der auf seinen Schenkeln abgeschnittenen Sehnen ein Maximum ist.

11. Ebenso, wenn das Rechteck aus den beiden Sehnen ein Maximum sein soll.

12. Von allen Tangenten-Vierecken eines gegebenen Kreises, welche einen gegebenen Winkel und die Eigenschaft haben, dass sich denselben zugleich ein Kreis umbeschreiben lässt, diejenigen zu finden, deren Flächeninhalt ein Maximum oder ein Minimum ist.

13. Von allen einem gegebenen Kreise umbeschriebenen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Flächeninhalt ein Minimum ist.

14. Das grösste von allen denjenigen Vierecken zu bestimmen, welche einen gegebenen Winkel, einen gegebenen Umfang und die Eigenschaft haben, dass sich sowohl in, als um jedes Kreise beschreiben lassen.

15. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass das Rechteck aus ihren Abschnitten ein Minimum werde.

16. Welches ist das grösste unter allen Dreiecken, deren Spitze der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises und deren Grundlinie eine zu einer gegebenen Geraden parallele Sehne ist?

17. Welches unter allen gleichschenkeligen Dreiecken, die sich einem gegebenen Kreise einbeschreiben lassen, hat den grössten Umfang?

18. Welches unter allen gleichschenkeligen Dreiecken, die sich einem gegebenen Kreise einbeschreiben lassen, hat den grössten Inhalt?

19. Welches ist das grösste von allen Dreiecken, deren Spitzen im Mittelpunkt eines gegebenen Kreises liegen, und deren Grundlinien Sehnen sind, die sich in einem innerhalb oder ausserhalb des Kreises gegebenen Punkte schneiden?

20. Von allen einem gegebenen Kreise umbeschriebenen Dreiecken, welche einen gegebenen Winkel haben, dasjenige zu finden, welches den grössten oder den kleinsten Flächeninhalt hat.

21. Ebenso, wie in 20, dasjenige, welches den grössten oder den kleinsten Umfang hat.

22. In einen gegebenen Kreissector soll ein Rechteck von möglichst grossem Inhalt so einbeschrieben werden, dass zwei seiner Seiten der Halbirungslinie des Centriwinkels parallel werden.

23. Auf dem Bogen eines Kreissectors einen Punkt so zu bestimmen, dass die von ihm auf die begrenzenden Radien gefällten Senkrechten eine möglichst grosse Summe geben.

24. Ebenso, wenn die beiden Senkrechten mit den begrenzenden Radien ein möglichst grosses Viereck einschliessen sollen.

25. Auf dem Bogen eines Kreissectors soll ein Punkt bestimmt werden, sodass seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt durch die Sehne des Bogens in zwei Abschnitte getheilt wird, deren Product ein Maximum ist.

26. Zu einer gegebenen Sehne eines Kreises eine parallele Sehne in denselben zu legen, sodass der Inhalt des hierdurch bestimmten einbeschriebenen Trapezes ein Maximum werde.

27. Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten der Peripherie ein Maximum werde.

28. Unter allen Kreis-Abschnitten, welche einen gegebenen Flächeninhalt haben, denjenigen zu bestimmen, welcher den kleinsten Umfang hat.

29. Auf der Spitze eines Thurmes von a^m Höhe ist eine vertikale Signalstange von b^{cm} Höhe aufgesteckt; man bestimme die Entfernung vom Fusse des Thurmes in der betreffenden Horizontalebene, in welcher die Stange unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint.

30. Um einen Punkt in der Peripherie eines Kreises sei derjenige Kreis beschrieben, welcher innerhalb des ersteren den grössten Bogen liefert; man berechne den Centriwinkel dieses Bogens. (Transcendente Gleichung. Vergl. Anh. 3, *f*.)

31. Welchen Neigungswinkel muss ein Dach, dessen Basis gleich b gegeben ist, haben, damit das Wasser in der möglichst kleinsten Zeit von demselben abfliesst?

Ueber die Behandlung dieser und anderer Aufgaben vergl. Martus Maxima und Minima.

C. Sphärische Trigonometrie.

I. Das rechtwinkelige Dreieck.

§. 31. Die Fundamental-Formeln.

1. Es seien OA, OB, OC die Kanten einer an OC rechtwinkeligen körperlichen Ecke, BC senkrecht auf OC, BA senkrecht auf OA, und mithin CA senkrecht zu OA; durch die Ebene ABC ist am Punkte B eine zweite Ecke entstanden, welche die Complementar-Ecke der ursprünglichen heisse. Man bestimme die ebenen Winkel und die Flächenwinkel der Complementar-Ecke aus den Stücken der ursprünglichen. Welche Formeln erhält man, wenn man die Fundamentalformeln für die Berechnung der rechtwinkeligen Ecke auf die Stücke ihrer Complementar-Ecke anwendet?

2. Lässt sich der Aufgabe 1 entsprechend zu einem gegebenen rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ein „Complementar-Dreieck" auf einfache Weise construiren? Wieviele der Formeln für das erstere sind nothwendig, um durch Anwendung derselben auf die beiden Dreiecke sämmtliche sechs Fundamentalformeln des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks zu erhalten, und wie lassen sich also die vier übrigen aus jenen beiden ableiten?

3. Welche Formen erhalten die sechs Grundformeln des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, wenn eine Kathete ein Quadrant ist; welche, wenn beide Katheten Quadranten sind?

4. Wird der Radius im Verhältniss zu den Seiten eines sphärischen Dreiecks derselben Kugel unendlich gross (oder diese im Verhältniss zu jenem unendlich klein), so nehmen die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden ab, und es nähert sich der Sinus eines solchen der Grenze Null, der Cosinus der Grenze 1, und das Verhältniss der Sinus oder Tangenten zweier solcher Bogen hat das Verhältniss der Bogen selbst zur Grenze. Das sphärische Dreieck endlich geht in ein ebenes über. Welche Formeln für das rechtwinkelige ebene Dreieck erhält man auf dem angegebenen Wege aus den Grundformeln des rechtwinkeligen sphärischen? Die Gleichung $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$ quadrire man und führe statt der Cosinus die Sinus ein.

5. Zieht man durch den Scheitel C des rechten Winkels

eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks an jede der anliegenden Seiten eine Tangente bis zum Durchschnitt mit der entsprechenden Kante und verbindet die Durchschnittspunkte $B_1\, A_1$ mit einander, so kann man mittelst der Dreiecke CB_1A_1 und B_1OA_1 die Linie $A_1\, B_1$ doppelt durch Stücke des gegebenen sphärischen Dreiecks ausdrücken. Auf welche Formel wird man hierdurch geführt?

6. Lassen sich die Grundformeln für rechtwinkelige sphärische Dreiecke auch auf solche Dreiecke übertragen, welche einen Winkel von 270^0 haben, und in welcher Weise?

§. 32. Die Fundamental-Aufgaben.

a) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse c und einer Kathete a zu berechnen.

1. $c = 83^0\ 24'\ 15'',3$
$a = 34.\ 11.\ 20,1$

$\log\cos c = 9{,}0601816$; $\log\sin c = 9{,}9971159$; $\log\operatorname{tang} c = 10{,}9369344$
$\log\cos a = 9{,}9176049$; $\log\sin a = 9{,}7496771$; $\log\operatorname{tang} a = 9{,}8320722$
$\log\cos b = 9{,}1425767$; $\log\sin\alpha = 9{,}7525612$; $\log\cos\beta = 8{,}8951378$
$b = 82^0\ 1'\ 5'',24$; $\alpha = 34^0\ 26'\ 55'',15$; $\beta = 85^0\ 29'\ 41'',50$.

Probe: $\log\cos\beta = \log\cos b + \log\sin\alpha$.

2. $c = 83^0\ 17'\ 10''$
$a = 17.\ 21.\ 32$

$\log\cos c = 9{,}06786$; $\log\sin c = 9{,}99701$; $\log\operatorname{tang} c = 10{,}92915$
$\log\cos a = 9{,}97976$; $\log\sin a = 9{,}47473$; $\log\operatorname{tang} a = 9{,}49498$
$\log\cos b = 9{,}08810$; $\log\sin\alpha = 9{,}47772$; $\log\cos\beta = 8{,}56583$
$b = 82^0\ 57'\ 51'',2$; $\alpha = 17^0\ 28'\ 57'',0$; $\beta = 87^0\ 53'\ 28'',0$.

	c	a	b	α	β
3.	$55^0\ 9'\ 32''$	$22^0\ 15'\ 7''$	$51^0\ 53'\ 0'',0$	$27^0\ 28'\ 37'',5$	$73^0\ 27'\ 11'',1$
4.	23. 49. 51	14. 16. 35	19. 17. 0,0	37. 36. 49,3	54. 49. 23,3
5.	44. 33. 17	32. 9. 17	32. 41. 0,0	49. 20. 16,7	50. 19. 16,0
6.	75. 28. 41	54. 48. 12	64. 12. 41,4	57. 34. 52,3	68. 27. 15,1
7.	95. 44. 12	12. 15. 19	95. 52. 15,1	12. 19. 4,1	91. 15. 1,4

8. $c = 97^0\ 13'\ 4''$ 9,09914n; 9,99655; 0,89741n
$a = 132.\ 14.\ 12$ 9,82750n; 9,86945; 0,04196n
9,27164; 9,87290; 9,14455
$b = 79^0\ 13'\ 38'',2$; $\alpha = 131^0\ 43'\ 50'',0$; $\beta = 81^0\ 58'\ 53'',3$.

Warum war hier für α der stumpfe Winkel zu nehmen?

9. $c = 100^0\ 12'\ 48''$; $a = 121^0\ 45'\ 34''$; $b = 70^0 18' 49'',7$; $\alpha = 120^0\ 14'\ 8'',3$; $\beta = 73^0\ 4'\ 47'',1$.

10.	$c = 37^0\ 40'\ 20''$	9,89846	9,78614	9,88768
	$a = 37.\ 40.\ 12$	9,89847	9,78612	9,88764
		9,99999	9,99998	9,99996

$b = 0^0\ 17' - 0^0\ 28'$? $\alpha = 89^0\ 24' - 31'$? $\beta = 0^0\ 44' - 49'$?

11. Für Fälle von Ungenauigkeit, wie in der vorigen Aufgabe, dienen die Formeln: $\operatorname{tang} \frac{1}{2}b^2 = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c+a) . \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c-a)$;

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(c+a) . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c-a);$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta^2 = \sin(c-a) : \sin(c+a).$$

Man leite diese Formeln aus den entsprechenden, welche vorher angewendet wurden, ab.

12. Wiederholung von Nr. a. 10 nach den Formeln in Nr. 11.

$$c = 37^0\ 40'\ 20''$$
$$a = 37.\ 40.\ 12$$
$$c + a = 75.\ 20.\ 32$$
$$c - a = 0.\ 0.\ 8$$
$$\tfrac{1}{2}(c+a) = 37.\ 40.\ 16$$
$$\tfrac{1}{2}(c-a) = 0.\ 0.\ 4$$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c+a) = 9,88766$	$\log \sin(c-a) = 5,58866$ *)
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c-a) = 5,28763$ *)	$\log \sin(c+a) = 9,98563$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}b^2 = 5,17529$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta^2 = 5,60303$
$\log \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = 5,39997$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta = 7,80152$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}b = 7,58765$	$\frac{1}{2}\beta = 0^0\ 21'\ 46''$
$\log \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = 7,69999$	$\beta = 0.\ 43.\ 42,0$
$\frac{1}{2}b = 0^0\ 13'\ 18'',13$	$b = 0.\ 26.\ 36,3$
$45^0 - \frac{1}{2}\alpha = 0.\ 17.\ 13,73$	$\alpha = 89.\ 25.\ 32,5$

13. $c = 43^0\ 0'\ 25''$; $a = 42^0\ 51'\ 44''$; $b = 3^0\ 55'\ 35'',4$; $\alpha = 85^0\ 46'\ 47'',8$; $\beta = 5^0\ 45'\ 42'',4$.

14. $c = 171^0\ 0'$; $a = 8^0\ 12'$; $b = 176^0\ 16'\ 40'',1$; $\alpha = 65^0\ 44'\ 53'',3$; $\beta = 155^0\ 28'\ 52'',5$.

b) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus seinen beiden Katheten a, b zu berechnen.

---

*) Vergl. §. 16 *A*, Regel 5, und *B*, Regel 3.

1. $a = 16^0\ 2'\ 15'',3$
$b = 57.\ 27.\ 20,5$

$\log\cos a = 9,9827598;\quad \log\text{tang}\, a = 9,4585704;$
$\log\cos b = 9,7307432;\quad \log\sin b = 9,9258151;$
$\log\cos c = 9,7135030 + \log\text{tang}\,\alpha = 9,5327553;$
$c = 58^0\ 52'\ 3'',99;\quad \alpha = 18^0\ 49'\ 45'',89;$

$\log\text{tang}\, b = 10,1950719$
$\log\sin a = 9,4413302$
$\log\text{tang}\,\beta = 0,7537417$
$\beta = 80^0\ 0'\ 4'',91.$

Probe: $\log\cos c + \log\text{tang}\,\alpha + \log\text{tang}\,\beta = 0.$

2. $a = 85^0\ 20'\ 15''$
$b = 36.\ 40.\ 10$

$\log\cos a = 8,91001;\quad \log\text{tang}\, a = 1,08854;\quad \log\text{tang}\, b = 9,87189$
$\log\cos b = 9,90422;\quad \log\sin b = 9,77612;\quad \log\sin a = 9,99856$
$\log\cos c = 8,81423;\quad \log\text{tang}\,\alpha = 1,31242;\quad \log\text{tang}\,\beta = 9,87333$
$c = 86^0\,15'\,42'',6;\quad \alpha = 87^0\,12'\,41'',5;\quad \beta = 36^0\,45'\,36'',7.$

3. $a = 178^0\ 12'\ 20''$ $\quad 9,99979n \quad 8,49595n \quad 8,62535$
$b = \ \ 2.\ 25.\ \ 0$ $\quad 9,99961 \quad 8,62497 \quad 8,49574$
$\quad 9,99940n \quad 9,87098n \quad 0,12961$

$c = 177^0\ 0'?\quad \alpha = 143^0\ 23'\ 17'',8;\quad \beta = 53^0\ 25'\ 32'',1.$

$\log\text{tang}\, a = 8,49595n$ oder $\log\text{tang}\, b = 8,62535$
$\log\cos\beta = 9,77519 \quad \log\cos\alpha = 9,90458n$
$\log\text{tang}\, c = 8,72076n = 8,72077n$
$c = 176^0\ 59'\ 26''.$

	a	b	c	α	β
4.	120° 10′ 0″	150° 59′ 44″	63° 55′ 43″,3	105° 44′ 21″,25	147° 19′ 47″,2
5.	50. 0. 0	36. 54. 49	59. 4. 25,7	63. 15. 13,2	44. 26. 21,4
6.	36. 27. 0	43. 32. 31	54. 20. 0	46. 59. 48,3	57. 59. 19,2
7.	86. 40. 0	32. 40. 0	87. 11. 39,8	88. 11. 57,8	32. 42. 37,8
8.	41. 50. 20	50. 18. 11	61. 35. 5,0	49. 19. 28,6	61. 1. 32,9

c) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus der Hypotenuse c und einem ihr anliegenden Winkel α zu berechnen.

1. $c = 81^0\ 29'\ 32'';\quad \alpha = 32^0\ 28'\ 17''.$

$\log\sin c = 9,9951945;\quad \log\text{tang}\, c = 10,8250982;$
$\log\sin\alpha = 9,7278843;\quad \log\cos\alpha = 9,9269687;$
$\log\sin a = 9,7230788;\quad \log\text{tang}\, b = 0,7520669;$

$$\log \cos \ c = 9{,}1700960$$
$$\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}8009157$$
$$\log \operatorname{cotg} \beta = 8{,}9710120$$

$a = 31^0\ 54'\ 24'',99$; $b = 79^0\ 57'\ 48'',65$; $\beta = 84^0\ 39'\ 21'',33$.

Probe: $\log \sin a = \log \operatorname{tang} b + \log \operatorname{cotg} \beta$.

2. $c = 17^0\ 40'\ 12''$; $\alpha = 27^0\ 0'\ 50''$.

$\log \sin c = 9{,}48221$; $\log \operatorname{tang} c = 9{,}50320$; $\log \cos c = 9{,}97901$

$\log \sin \alpha = 9{,}65725$; $\log \cos \alpha = 9{,}94983$; $\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}70743$

$\log \sin a = 9{,}13946$; $\log \operatorname{tang} b = 9{,}45303$; $\log \operatorname{cotg} \beta = 9{,}68644$

$a = 7^0\ 55'\ 28'',0$; $b = 15^0\ 50'\ 40'',0$; $\beta = 64^0\ 5'\ 26'',4$.

In welchem Falle ist $a > 90^0$ zu nehmen?

3. $c = 89^0\ 30'\ 30''$; $\alpha = 89^0\ 15'\ 45''$.

9,99998	2,06644	7,93354	$\log \operatorname{tang} \alpha = 1{,}89034$
9,99996	8,10963	1,89034	$\log \sin b = 9{,}92014$
9,99994	0,17607	9,82388	$\log \operatorname{tang} a = 1{,}81048$

$a = 89^0 1' - 5'$? $b = 56^0 18' 31'',1$; $a = 89^0 6' 48'',9$

$\beta = 56^0\ 18'\ 42'',2$.

	c	α	a	b	β
4.	$69^0\ 25'\ 11''$	$54^0\ 54'\ 42''$	50^0	$56^0\ 50'\ 49''$	$63^0\ 25'\ 4''$
5.	112. 48. 0	56. 11. 56	50.	127. 4. 32	120. 3. 50
6.	46. 40. 12	37. 46. 9	$26^0\ 27'\ 23'',8$	39. 57. 41,4	62. 0. 4,0
7.	118. 40. 1	128. 0. 4	136. 15. 32,7	48. 23. 38,6	58. 27. 4,3
8.	58. 30. 25	22. 0. 55	18. 38. 27,4	56. 32. 33,3	78. 4. 23,3

d) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel α zu berechnen.

1. $a = 32^0\ 11'\ 0'',54$; $\alpha = 42^0\ 23'\ 59'',90$.

$\log \sin a = 9{,}7264275$; $\log \operatorname{tang} a = 9{,}7988792$;

$\log \sin \alpha = 9{,}8288545$; $\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}9605301$;

$\log \sin c = 9{,}8975730$; $\log \sin b = 9{,}8383491$;

$c_1 = 52^0\ 10'\ 34'',74$; $b_1 = 43^0\ 34'\ 2'',26$;

$c_2 = 127.\ 49.\ 25{,}26$; $b_2 = 136.\ 25.\ 57{,}74$;

$$\log \cos \alpha = 9{,}8683244$$
$$\log \cos a = 9{,}9275483$$
$$\log \sin \beta = 9{,}9407761$$
$$\beta_1 = 60^0\ 45'\ 10'',77$$
$$\beta_2 = 119.\ 14.\ 49{,}23.$$

2. $a = 77^0\ 21'\ 50''$; $\alpha = 83^0\ 56'\ 40''$.

$\log \sin a = 9{,}98935$	$\log \operatorname{tang} a = 0{,}64939$	$\log \cos \alpha = 9{,}02323$
$\log \sin \alpha = 9{,}99757$	$\log \operatorname{tang} \alpha = 0{,}97435$	$\log \cos a = 9{,}33996$
$\log \sin c = 9{,}99178$	$\log \sin b = 9{,}67504$	$\log \sin \beta = 9{,}68327$
$c_1 = 78^0\ 53'\ 20'',0$	$b_1 = 28^0\ 14'\ 31'',1$	$\beta_1 = 28^0\ 49'\ 57'',4$
$c_2 = 101.\ 6.\ 40{,}0$	$b_2 = 151.\ 45.\ 28{,}9$	$\beta_2 = 151.\ 10.\ 2{,}6$

Probe: $\log \sin c + \log \sin \beta = \log \sin b$.

3. $a = 77^0\ 21'\ 50''$; $\alpha = 40^0\ 40'\ 40''$.

$\log \sin a = 9{,}98935$
$\log \sin \alpha = 9{,}81412$
$\log \sin c = 0{,}17523$, unmöglich.

4. $a = 34^0\ 6'\ 13''$; $\alpha = 34^0\ 7'\ 41''$.

$\log \sin a = 9{,}74872$	$\log \operatorname{tang} a = 9{,}83068$	$\log \cos \alpha = 9{,}91792$
$\log \sin \alpha = 9{,}74900$	$\log \operatorname{tang} \alpha = 9{,}83108$	$\log \cos a = 9{,}91804$
$\log \sin c = 9{,}99972$	$\log \sin b = 9{,}99960$	$\log \sin \beta = 9{,}99988$
$c_1 = 87^0\ 56' - 57'$?	$b_1 = 87^0\ 32' - 33'$?	$\beta_1 = 88^0\ 38' - 40'$?

5. Folgende Formeln abzuleiten:

$$\operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} c)^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - a) \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\alpha + a),$$
$$\operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} b)^2 = \sin (\alpha - a) : \sin (\alpha + a),$$
$$\operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} \beta)^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - a) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha + a).$$

6. Wiederholung von d 4. nach den Formeln in 5.

$a = 34^0\ 6'\ 13''$
$\alpha = 34.\ 7.\ 41$
$\alpha - a = 0.\ 1.\ 28$
$\alpha + a = 68.\ 13.\ 54$
$\tfrac{1}{2} (\alpha - a) = 0.\ 0.\ 44$
$\tfrac{1}{2} (\alpha + a) = 34.\ 6.\ 57$

$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - a) = 6{,}32903$	$\log \sin (\alpha - a) = 6{,}63006$
$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha + a) = 9{,}83088$	$\log \sin (\alpha + a) = 9{,}96788$
$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} c)^2 = 6{,}49815$	$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} b)^2 = 6{,}66218$
$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} \beta)^2 = 6{,}15991$	$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} b) = 8{,}33109$
$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} c) = 8{,}24908$	$45^0 - \tfrac{1}{2} b = 1^0\ 13'\ 40'',30$
$\log \operatorname{tang} (45^0 - \tfrac{1}{2} \beta) = 8{,}07996$	$b = 87^0\ 32'\ 39'',4$
$45^0 - \tfrac{1}{2} c = 1^0\ 0'\ 59'',83$	$c = 87.58.\ 0{,}3$
$45^0 - \tfrac{1}{2} \beta = 0.\ 41.\ 19{,}50$	$\beta = 88.37.21{,}0.$

	a	α	c_1	b_1	β_1
7.	83° 10′ 1″	84° 45′ 19″	85° 36′ 50″	50° 0′ 0″	50° 12′ 5″
8.	87. 12. 28	87. 51. 37	88. 12. 20	50. 0. 6	50. 2. 6
9.	33. 40. 10	43. 21. 17	53. 51. 27	44. 52. 28	60. 53. 25
10.	46. 41. 15	56. 0. 0	61. 21. 51,7	45. 40. 50	54. 36. 13,3
11.	111. 44. 0	95. 45. 11	69. 0. 25	14. 37. 27	15. 42. 24

e) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus einer Kathete a und dem anliegenden Winkel β zu berechnen.

1. $a = 20^0\ 17'\ 3'',14$; $\beta = 30^0\ 29'\ 22'',05$.

$\log \operatorname{tang} a = 9,5677294$; $\log \sin a = 9,5399252$;
$\log \cos \beta = 9,9353675$; $\log \operatorname{tang} \beta = 9,7699658$;

$\log \operatorname{tang} c = 9,6323619$; $\log \operatorname{tang} b = 9,3098910$;
$c = 23^0\ 12'\ 53'',19$; $b = 11^0\ 32'\ 12'',74$;

$\log \cos a = 9,9721957$
$\log \sin \beta = 9,7053332$

$\log \cos \alpha = 9,6775289$
$\alpha = 61^0\ 34'\ 51'',93$.

2. $a = 88^0\ 5'\ 7''$; $\beta = 38^0\ 19'\ 48''$.

$\log \operatorname{tang} a = 1,47585$ $\log \sin a = 9,99976$ $\log \cos a = 8,52390$
$\log \cos \beta = 9,89457$ $\log \operatorname{tang} \beta = 9,89796$ $\log \sin \beta = 9,79253$

$\log \operatorname{tang} c = 1,58128$ $\log \operatorname{tang} b = 9,89772$ $\log \cos \alpha = 8,31643$
$c = 88^0\ 29'\ 51'',9$; $b — 38^0\ 18'\ 53'',0$; $\alpha = 88^0\ 48'\ 45'',5$.

Probe: $\log \operatorname{tang} c + \log \cos \alpha = \log \operatorname{tang} b$.

Wie verfährt man, wenn sich α nahe an 0° oder 180° ergiebt, also durch die Cosinus der Tafeln nicht genau zu bestimmen ist?

	a	β	c	b	α
3.	92° 47′ 32″	50° 2′ 1″	91° 47′ 40″	50° 0′ 0″	92° 8′ 23″
4.	96. 49. 59	50. 12. 4	94. 23. 10	50. 0. 0	95. 14. 41,5
5.	2. 0. 55	12. 40. 0	2. 3. 55,8	0. 27. 10,2	77. 20. 28,4
6.	20. 20. 20	38. 10. 10	25. 14. 38,2	15. 16. 50,4	54. 35. 16,7
7.	54. 30. 0	35. 30. 0	59. 51. 20,8	30. 8. 39,2	70. 17. 35

f) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aus seinen Winkeln α, β zu berechnen.

1. $\alpha = 32^0\ 23'\ 19''$; $\beta = 69^0\ 12'\ 25''$.

$\log \operatorname{cotg} \alpha = 10,1976776$; $\log \cos \alpha = 9,9265659$;
$\log \operatorname{cotg} \beta = 9,5794700$; $\log \sin \beta = 9,9707506$;

$\log \cos c = 9,7771476$; $\log \cos a = 9,9558153$;
$c = 53^0\ 13'\ 45'',23$; $a = 25^0\ 24'\ 33'',70$;

$$\log\cos\beta = 9,5502206$$
$$\log\sin\alpha = 9,7288884$$
$$\log\cos b = 9,8213322$$
$$b = 48^0\,29'\,31'',58.$$

2. a) $\alpha = 42^0\,24'\,9''$; $\beta = 99^0\,4'\,11''$.

$\log\operatorname{cotg}\alpha = 0,03943$	$\log\cos\alpha = 9,86830$	$\log\cos\beta = 9,19766\,n$
$\log\operatorname{cotg}\beta = 9,20312\,n$	$\log\sin\beta = 9,99454$	$\log\sin\alpha = 9,82887$
$\log\cos c = 9,24255\,n$	$\log\cos a = 9,87376$	$\log\cos b = 9,36879\,n$
$c = 100^0\,4'\,1'',7$	$a = 41^0\,36'\,11'',1$	$b = 103^0\,31'\,9'',1$

Probe: $\log\cos c = \log\cos a + \log\cos b$.

b) $\alpha = 42^0\,24'\,9''$; $\beta = 9^0\,4'\,11''$, unmöglich. Warum?

Wie kann man aus den hier gebrauchten Formeln andere ableiten, welche die gesuchten Stücke in ungünstigen Fällen genauer durch Tangenten bestimmen, und wie lauten dieselben? Vergl. a. 11. und d. 5.

	α	β	c	a	b
3.	$63^0\,15'\,12''$	$135^0\,33'\,39''$	$120^0\,55'\,34''$	$49^0\,59'\,56''$	$143^0\,5'\,12''$
4.	116. 43. 12	116. 31. 25	75. 26. 59	120. 10. 3	119. 59. 49
5.	46. 59. 42	57. 59. 17	54. 20. 3	36. 27. 0	43. 33. 30
6.	90. 0. 0	88. 24. 35	90. 0. 0	90. 0. 0	88. 24. 35
7.	10. 45. 52,0	79. 34. 20,1	14. 32. 0	2. 41. 10,0	14. 17. 0

§. 33. Berechnung sphärischer Dreiecke, welche sich auf rechtwinkelige zurückführen lassen.

1. Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite c ein Quadrant ist, wenn die beiden anderen Seiten gegeben sind. $a = 174^0\,12'\,49'',1$; $b = 94^0\,8'\,20'',0$.

2. Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite c ein Quadrant ist, wenn die ihr anliegenden Winkel α, β gegeben sind. $\alpha = 110^0\,47'\,50''$; $\beta = 135^0\,35'\,34'',5$.

3. Entsprechende Aufgaben: Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, in welchem eine Seite gleich 90^0 ist, wenn gegeben sind: a) der ihr gegenüberliegende Winkel und ein ihr anliegender Winkel, b) der ihr gegenüberliegende Winkel und eine zweite Seite, c) ein ihr anliegender Winkel und die diesem gegenüberliegende Seite, d) ein ihr anliegender Winkel und die zweite diesem anliegende Seite.

4. Ein gleichschenkeliges sphärisches Dreieck aus dem Schenkel und der Grundlinie zu berechnen.

5. Die Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks aus der Seite desselben zu berechnen.

Bildung entsprechender Aufgaben über Dreiecke, welche zwei gleiche Seiten oder Winkel haben.

6. Ein sphärisches Dreieck, in welchem die Summe zweier Seiten oder die Summe zweier Winkel 180^0 beträgt, aus Bestimmungsstücken desselben zu berechnen.

α) $a = 58^0\,23'\,45''$; $b = 121^0\,36'\,15''$; $c = 68^0\,2'\,12''$;
$\alpha = 24.\,16.\,10$; $\beta = 155.\,43.\,50$; $\gamma = 26.\,35.\,18$.

β) $a = 152.\,11.\,36$; $b = 27.\,48.\,24$; $c = 160.\,57.\,50$;
$\alpha = 108.\,31.\,55$; $\beta = 71.\,28.\,5$; $\gamma = 138.\,28.\,38$.

7. Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, in welchem die Summe der drei Seiten 180^0 beträgt, aus der Hypotenuse c zu berechnen.

§. 34. Formeln und Lehrsätze über das rechtwinkelige sphärische Dreieck zum Ableiten und Beweisen.

1. $\sin a^2 + \sin b^2 - \sin c^2 = \sin a^2 \,.\, \sin b^2$.

2. $\sin a^2 \,.\, \cos b^2 = \sin (c - b) \,.\, \sin (c + b)$.

3. $\sin (c - b) \,.\, \sin (c + b) : \sin (c - a) \,.\, \sin (c + a) = \operatorname{tang} a^2 : \operatorname{tang} b^2$.

4. $\sin (c - b) \,.\, \sin (c + b) - \sin (c - a) \,.\, \sin (c + a) = \sin a^2 - \sin b^2$.

5. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a^2 = -\frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} \,.\, \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}$.

6. $\cos \alpha^2 \,.\, \sin c^2 = \sin (c - a) \,.\, \sin (c + a)$.

7. $\sin \alpha^2 \,.\, \cos c^2 = \sin (\alpha - a) \,.\, \sin (\alpha + a)$.

8. $\sin \alpha^2 \,.\, \cos b^2 \,.\, \sin c^2 = \sin (c - b) \,.\, \sin (c + b)$.

9. $\cos a^2 \,.\, \cos \beta^2 = \sin (\alpha - a) \,.\, \sin (\alpha + a)$.

10. $\cos \alpha^2 + \cos c^2 - \cos a^2 = \cos \alpha^2 \,.\, \cos c^2$.

11. $\sin \alpha^2 = \cos \beta^2 + \sin a^2 \,.\, \sin \beta^2$.

12. $\operatorname{tang} a \,.\, \cos c = \sin b \,.\, \operatorname{cotg} \beta$.

13. $2 \,.\, \cos \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, \cos b \,.\, \sin c = \sin (b + c)$.

14. $2 \,.\, \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, \cos b \,.\, \sin c = \sin (c - b)$.

15. $\sin (a + b) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \sin (a - b) \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$.

16. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos b + \cos a}{1 + \cos b \cdot \cos a}$;

$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\cos b - \cos a}{1 - \cos b \cdot \cos a}$.

17. $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sin a \cdot \sin b}{1 + \cos a \cdot \cos b}$;

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sin a \cdot \sin b}{1 - \cos a \cdot \cos b}$.

18. Das Quadrat der Tangente jeder Kathete ist gleich dem Rechteck aus der Tangente der Hypotenuse und der Tangente desjenigen Abschnitts der letzteren, welcher zwischen jener Kathete und der Hypotenusen-Höhe liegt.

19. Das Quadrat des Sinus der Hypotenusen-Höhe ist gleich dem Product der Tangenten der durch sie gebildeten Abschnitte der Hypotenuse.

20. Sind in einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck die Katheten a, b einander gleich, so ist

$$\operatorname{cotg} \alpha = \cos a = \sqrt{\cos c}.$$

§. 35. Anwendungen des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks.

Stereom. Aufgaben

1. Ein sphärisches Quadrat ist ein sphärisches Viereck, welches gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Durch die Diagonalbogen wird dasselbe in vier rechtwinkelige Dreiecke zerlegt. Man berechne aus der Seite eines solchen Quadrats den Winkel desselben oder aus dem Winkel die Seite.

2. Eine **regelmässige** Ecke ist eine drei- oder mehrseitige körperliche Ecke, welche lauter gleiche ebene Winkel und lauter gleiche Flächenwinkel hat. Ihr entspricht auf der Kugelfläche ein **regelmässiges sphärisches Polygon**, d. h. ein solches, welches lauter gleiche Seiten und Winkel hat. Aus stereometrischen Sätzen ist zu beweisen, dass es in jeder regelmässigen Ecke eine durch ihre Spitze gehende Gerade giebt, welche mit allen Kanten und ebenso mit allen Flächen der Ecke gleiche Winkel bildet. Der Durchschnittspunkt dieser **Axe** der Ecke mit der Fläche des zugehörigen sphärischen Polygons ist der **Mittelpunkt** des letzteren, d. h. seine auf Bögen grösster Kreise gemessenen Abstände von den Eckpunkten des Polygons (grosse

sphärische Radien) und ebenso die entsprechenden Abstände von den Seiten (kleine sphärische Radien) sind einander gleich; die ersteren halbiren den je zugehörigen Polygonwinkel, die letzteren halbiren die zugehörigen Seiten.

Von einem regelmässigen sphärischen Polygon sei die Anzahl der Seiten gleich n und eine Seite gleich a gegeben; man berechne seinen Winkel und seine sphärischen Radien.

Man bilde und löse die verschiedenen Umkehrungen der vorstehenden Aufgabe. Vergl. hier und weiterhin: Koppe, sphärische Trigonometrie.

3. Man wende die in 2. angeführten Aufgaben auf die Ecken der fünf regelmässigen Polyeder an und berechne also für jedes der letzteren die Neigungswinkel der aneinanderliegenden Flächen und die Neigungswinkel der Axe der Ecke gegen die Kanten und die Flächen derselben.

Anmerkung. Für jeden der fünf Körper existirt eine trigonometrische Function eines der berechneten Winkel, welche einer rationalen Zahl gleich ist.

4. Man berechne den Neigungswinkel der Seitenflächen einer geraden, regelmässig $= n$-(10-)seitigen Pyramide gegen einander aus dem Winkel α ($= 18^0$) an der Spitze einer Seitenfläche.

5. Durch den Fusspunkt einer Geraden, welche gegen eine Ebene unter dem Winkel φ geneigt ist, sei in dieser Ebene eine Gerade gezogen, welche mit dem Neigungsschenkel den Winkel α bildet. Welchen Winkel bildet diese Gerade mit der ersten?

6. Von einem schiefen Kegel sei der Radius r der Grundfläche, die Länge a der Axe und die Höhe h gegeben; es soll die Länge einer Seitenlinie des Kegels nebst dem Winkel, welchen sie mit der Axe bildet, berechnet werden, wenn das vom Fusspunkt der Seitenlinie auf den Neigungsschenkel der Axe gefällte Perpendikel gleich p gegeben ist.

Astronom. Aufgaben.

7. Aus der Länge der Sonne gleich l und der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\ 27'$ die Rectascension α und die Declination δ der Sonne zu berechnen.

8. Aus der geographischen Breite φ eines Ortes und der Declination δ der Sonne für einen bestimmten Tag die Zeit (wahre Sonnenzeit) und den Ort des Aufgangs — oder entsprechend des

Untergangs — der Sonne zu finden (ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung).

Wann und wo geht also die Sonne am längsten Tage auf, an welchem ihre Declination gleich der Schiefe der Ekliptik $= + 23^0 27'$ ist, z. B. in Berlin, dessen geographische Breite gleich $52^0 31'$ ist? Wann geht dieselbe an diesem Tage unter und welches ist hiernach die Dauer des längsten Tages in Berlin, wenn hierbei von dem Einfluss der Strahlenbrechung abgesehen wird? Ebenso für den kürzesten Tag, $\delta = - 23^0 27'$.

Für welchen Fall wird die Lösung dieser Aufgabe unmöglich, und was folgt daraus für die betreffenden Orte?

9. Man berechne die Höhe und das Azimuth der Sonne für einen bestimmten Beobachtungsort und einen bestimmten Tag um 6 Uhr Morgens (ohne Rücksicht auf die astronomische Strahlenbrechung). Gegeben die geographische Breite φ des Ortes und die Declination δ der Sonne für jenen Tag. $\varphi = 48^0 9'$ (München), $\delta = + 23^0 27'$ (längster Tag).

Wie ändert sich hiernach die Höhe, welche die Sonne um 6 Uhr Morgens an einem beliebigen Tage hat, mit der Lage des Ortes? Welche Lage hat sie für einen Ort im Aequator, welche an einem Pole? Welches ist die grösste mögliche Höhe?

Wie ändert sich das Azimuth an demselben Orte im Laufe des Jahres, wie an demselben Tage, wenn die Lage des Ortes geändert wird; welchen Werth erhält es für einen Ort des Aequators, welchen für einen Pol?

Anmerkung. Es folgt aus dem Resultate dieser Aufgabe, dass die Sinus der genannten Höhen der Sonne für zwei verschiedene Orte an demselben Tage sich verhalten, wie die Sinus der geogr. Breiten. Da nun die Erwärmung einer Fläche durch die Sonnenstrahlen dem Sinus des Neigungswinkels proportional ist, unter welchem die Strahlen die Fläche treffen, also dem Sinus der Sonnenhöhe, so kann hiermit erklärt werden, wie im Sommer die Temperatur um 6 Uhr Morgens an einem nördlicher gelegenen Orte höher sein kann, wie an einem südlicheren.

10. Zu welcher Zeit steht an einem Orte der nördlichen Halbkugel der Erde und an einem bestimmten Tage die Sonne genau im Osten oder im Westen? $\delta = + 23^0 27'$; $\varphi = 59^0 56'$ (Petersburg).

Welche Resultate erhält man für $\delta = 0$, d. h. für die Zeit der Tag- und Nachtgleichen? Warum kann die Sonne während des Sommers nie vor 6 Uhr Morgens im Osten, nie nach 6 Uhr Abends im Westen stehen? Wie ändern sich beide Zeitpunkte

mit dem Wachsen oder Abnehmen der Declination der Sonne (also während der einzelnen Quartale)? Welches Resultat erhält man, wenn die geographische Breite φ kleiner als die Declination δ der Sonne ist, welches wenn sie gleich δ ist, und wie ist dasselbe zu erklären? Welche Resultate erhält man für den Pol?

11. Auf einer horizontalen Ebene MN sei in einem Punkte O ein Stab OA unter einem Neigungswinkel AOB gleich der Polhöhe φ des Ortes befestigt und OB sei in die Richtung nach Norden gebracht. Der Schatten des Stabes falle zu einer bestimmten Zeit (h Uhr) in die Richtung OC. Man soll den Winkel BOC berechnen. Anwendung zur Construction einer horizontalen Sonnenuhr. $h = 1$ Uhr $= 15^0$, $\varphi = 51^0\,30'$.

12. Man denke sich in 11. durch O eine Vertikal-Ebene senkrecht zu OB gelegt und den Stab OA über O hinaus verlängert, so dass die Verlängerung ihren Schatten auf die Vertikal-Ebene werfe. Man löse die entsprechende Aufgabe für diese. (Vertikale Sonnenuhr.)

13. Ein Schiff segelt von einem Hafen, dessen geographische Breite gleich φ ist, in einem grössten Kreise unter dem Azimuth α nach dem Aequator. Man berechne die Lage des Ortes, in welchem es diesen trifft, und die Länge des Weges.

14. Zwei Orte liegen unter gleicher geographischer Breite φ, und ihre Längendifferenz ist gleich α. Um wieviel ist der Bogen des Parallelkreises zwischen beiden Orten grösser als der entsprechende Bogen des grössten Kreises? $\varphi = 45^0$, $\alpha = 90^0$.

Praktische Geometrie.

15. Mittelst eines Winkelinstrumentes sei die Projection eines Winkels auf den Horizont unter der Voraussetzung gemessen, dass die Axe des Fernrohrs genau senkrecht zu seiner horizontal liegenden Drehungsaxe sei; die Schenkel des Winkels haben gegen den Horizont bezüglich die Neigungswinkel h und h_1. Man soll die Verbesserung bestimmen, welche an dem gemessenen Winkel anzubringen ist, wenn die Axe des Fernrohrs von der zur Drehungsaxe senkrechten Richtung um den Winkel c abweicht. (Fehler der Collimationslinie.)

Welches Resultat erhält man, wenn c hinreichend klein ist, um statt des Sinus oder der Tangente desselben den Bogen setzen zu können? Wie gross ergiebt sich dann die berechnete Correction für $h = h_1$?

16. Die Horizontalaxe des Fernrohrs eines zum Messen horizontaler Winkel dienenden Instruments (eines Theodoliten) sei in Folge eines Fehlers der Stützen nicht genau horizontal, das Instrument im Uebrigen aber fehlerfrei. Es gebe der Winkel i den Fehler der Stützen an, und h, h_1 seien die Neigungen der Schenkel eines gemessenen Winkels gegen den Horizont; man berechne den Fehler in der Messung des betreffenden Horizontalwinkels.

Welche Formel erhält man, wenn $\operatorname{tang} i = i$ gesetzt werden darf, wie gross ergiebt sich dann der Fehler für $h = h_1$, und wie hängt derselbe überhaupt von den Werthen der h ab?

II. Das allgemeine sphärische Dreieck.

§. 36. Die Fundamentalformeln.

1. Die Gleichung $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ abzuleiten **a**) durch Zerlegung des schiefwinkeligen sphärischen Dreiecks in zwei rechtwinkelige und Anwendung einer für letztere geltenden Formel, **b**) mittelst Construction zweier Neigungswinkel in der zum Dreieck gehörigen Ecke.

2. Auf welche Gleichung wird man durch die Formel in 1. geführt, wenn einer der Winkel gleich 90^0 ist?

3. Welche Gleichung für ebene Dreiecke ergiebt sich aus der in 1., wenn man die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden abnehmen lässt?

4. Die Gleichung $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$ abzuleiten **a**) durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, analog dem bekannten (arithmetischen) Beweise des allgemeinen pythag. Lehrsatzes, **b**) mittelst der Construction zweier Neigungswinkel der zugehörigen Ecke in derselben Figur, **c**) mittelst des Dreiecks, welches die Ebene eines Neigungswinkels durch ihre Durchschnittslinien mit den Ebenen der Ecke bildet.

5. Was wird aus der Gleichung in 4. für $\alpha = 0$, 90^0 oder 180^0? Welche Formel für ebene Dreiecke erhält man aus ihr, wenn die Centriwinkel der Seiten bis zum Verschwinden abnehmen? Hierbei ist zu bemerken, dass in Producten von Cosinus der Seiten vorher jeder Cosinus durch den Sinus der halben

Seite auszudrücken, und dass $b^2 c^2$ als verschwindend klein gegen b^2 oder c^2 wegzulassen ist.

6. Die Gleichung $\cos\alpha = -\cos\beta . \cos\gamma + \sin\beta . \sin\gamma . \cos a$ abzuleiten a) durch Anwendung der Gleichung in 4. auf das Polardreieck, b) durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, Anwendung der für rechtwinkelige Dreiecke abgeleiteten Formel $\cos\alpha = \cos a . \sin\beta$ auf die Winkel α, β, Entwickelung von $\sin(\gamma - x)$ und Substitution für $\operatorname{cotg} x$ aus der betreffenden Formel für rechtwinkelige Dreiecke, c) durch alleinige Rechnung aus den Formeln 1. und 4.

Umformungen für rechtwinkelige sphärische und für ebene Dreiecke, ähnlich wie früher.

7. Die Gleichung $\operatorname{cotg} b . \sin c = \cos\alpha . \cos c + \sin\alpha . \operatorname{cotg}\beta$ abzuleiten a) durch Anwendung der Construction zweier Neigungswinkel, b) durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige, c) durch Rechnung aus den Formeln in 1. und 4.

Warum erhält man durch Anwendung dieser Formel auf das Polardreieck keinen neuen Satz?

8. Die Gleichungen, welche die Tangenten der halben Winkel durch die Seiten ausdrücken, werden gewöhnlich aus der Gleichung in 4. abgeleitet. Man führe folgende andere Ableitung aus: Aehnlich wie in dem entsprechenden Fall bei dem ebenen Dreieck beweise man, dass diejenigen Bögen grösster Kreise, welche die inneren Winkel eines sphärischen Dreiecks, oder welche zwei Aussenwinkel desselben und den am dritten Eckpunkt liegenden inneren Winkel halbiren, sich in einem einzigen Punkte schneiden, dessen (auf Bögen grösster Kreise gemessene) Abstände von den Dreiecksseiten (sphärische Radien der Berührungskreise) einander gleich sind. Man berechne die Abschnitte der Seiten ähnlich wie fürs ebene Dreieck, und leite, wenn ϱ den sphärischen Radius des einbeschriebenen Kreises, $2s$ die Summe der Dreiecksseiten bezeichnet, die Gleichungen

$$\operatorname{tang}\varrho^2 = \frac{\sin(s-a) . \sin(s-b) . \sin(s-c)}{\sin s},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\varrho}{\sin(s-a)}$$

ab, indem man die Formel $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$ des rechtwinkeligen Dreiecks auf $\frac{1}{2}\beta$, $90^0 - \frac{1}{2}\beta$ und zweimal auf $\frac{1}{2}\alpha$ anwendet.

9. Wie berechnen sich umgekehrt aus jenen, auf analytischem Wege abgeleiteten Formeln die genannten sphärischen Radien?

10. Aus den Formeln für die Sinus und die Cosinus der halben Winkel leite man Formeln für die Sinus der ganzen Winkel her.

11. Aus den in 10. abgeleiteten Formeln die Gleichung $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ zu beweisen.

12. Verschiedene Ableitungen der Formeln zu geben, welche die Functionen der halben Seiten durch die Winkel ausdrücken.

13. Die gewöhnlich durch alleinige Rechnung aus früheren Formeln abgeleiteten vier Neper'schen Analogien sollen mittelst einer Figur in ähnlicher Weise gefunden werden, wie in §. 19, Aufgabe 17. für die entsprechenden Formeln des ebenen Dreiecks gezeigt wurde. Ausserdem ist das Polardreieck anzuwenden*).

14. Entsprechend zu 13. die Gaussischen Gleichungen abzuleiten, unter Anwendung der Neper'schen Analogien für zwei derselben.

15. Die vier Gaussischen Gleichungen lassen sich auf eine zurückführen, indem man diese auf das „Aussendreieck" anwendet, welches das gegebene zur Halbkugel ergänzt (die Winkel $180^0 - \alpha$, $360^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$, die Seiten a, $360^0 - b$, c hat) und ausserdem das Polardreieck benutzt. Man führe dies aus. Begründung der Regel: Mit der Aenderung eines Zeichens müssen die Functionen für das andere Alphabet geändert werden.

16. Begründung der Regel für die Neper'schen Analogien: „Werden die Alphabete vertauscht, so ändern sich die Functionen eingliedriger Stücke" durch das Polardreieck.

17. Man untersuche, ob und unter welchen Bedingungen die unter der Voraussetzung, dass alle Stücke des sphärischen Dreiecks kleiner als 180^0 seien, abgeleiteten Formeln auch für Dreiecke gelten, welche dieser Bedingung nicht genügen.

---

*) Aufg. 13.—16. nach Ziegler's Trigonometrie.

§. 37. Die Fundamentalaufgaben.

a) Ein sphärisches Dreieck aus seinen drei Seiten a, b, c zu berechnen.

α) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\varrho}{\sin(s-a)}$;

$$\operatorname{tang}\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}, \text{ etc.}$$

1.

$a =$	25° 13′ 12″
$b =$	37. 14. 9
$c =$	58. 31. 51
$2s =$	120. 59. 12
$s =$	60. 29. 36
$s - a =$	35. 16. 24
$s - b =$	23. 15. 27
$s - c =$	1. 57. 45
$2s =$	120. 59. 12.

$\log\sin(s-a) =$	9,7615352	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha =$	9,2149232
$\log\sin(s-b) =$	9,5964477	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta =$	9,3800107
$\log\sin(s-c) =$	8,5346020	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma =$	0,4418564
	7,8925849	$\frac{1}{2}\alpha =$	9° 18′ 54″,98
$\log\sin s =$	9,9396682	$\frac{1}{2}\beta =$	13. 29. 23,03
$\log\operatorname{tang}\varrho^2 =$	7,9529167	$\frac{1}{2}\gamma =$	70. 7. 24,92
$\log\operatorname{tang}\varrho =$	8,9764584	$\alpha =$	18. 37. 50,0
		$\beta =$	26. 58. 46,1
		$\gamma =$	140. 14. 49,8

2.

$a =$	124° 12′ 31″
$b =$	54. 18. 16
$c =$	97. 12. 25
$2s =$	275. 43. 12
$s =$	137. 51. 36
$s - a =$	13. 39. 5
$s - b =$	83. 33. 20
$s - c =$	40. 39. 11
$2s =$	275. 43. 12.

$$\begin{aligned}
\log\sin(s-a) &= 9{,}37293 \\
\log\sin(s-b) &= 9{,}99725 \\
\log\sin(s-c) &= 9{,}81390 \\
\hline
& 9{,}18408 \\
\log\sin s &= 9{,}82669 \\
\hline
\log\operatorname{tang}\varrho^2 &= 9{,}35739 \\
\log\operatorname{tang}\varrho &= 9{,}67870
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha &= 0{,}30577 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta &= 9{,}68145 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma &= 9{,}86480 \\
\hline
\tfrac{1}{2}\alpha &= 63^0\,41'\,3'',8 \\
\tfrac{1}{2}\beta &= 25.\ 39.\ 5,6 \\
\tfrac{1}{2}\gamma &= 36.\ 13.\ 20,1 \\
\hline
\alpha &= 127.\ 22.\ 7 \\
\beta &= 51.\ 18.\ 11 \\
\gamma &= 72.\ 26.\ 40.
\end{aligned}$$

3.

$a = 93^0\,44'\,45''$	9,27527	0,08961
$b = 27.\ 16.\ 8$	9,98931	9,37557
$c = 88.\ 12.\ 19$	9,45089	9,91399
209. 13. 12	8,71547	$50^0\,52'\,9'',6$
104. 36. 36	9,98572	13. 21. 26,9
10. 51. 51	8,72975	39. 21. 48,1
77. 20. 28	9,36488	$\alpha =$ 101. 44. 19
16. 24. 17		$\beta =$ 26. 42. 54
209. 13. 12		$\gamma =$ 87. 43. 36.

78

β) Soll nur ein Winkel berechnet werden, so bedient man sich besser der Formel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,.\,\sin(s-c)}{\sin s\,.\,\sin(s-a)}}\,.$$

4.

$$\begin{aligned}
a &= 82^0\,33'\,51'' \\
b &= 27.\ 16.\ 9 \\
c &= 89.\ 12.\ 24 \\
\hline
2s &= 199.\ 2.\ 24 \\
\hline
s &= 99.\ 31.\ 12 \\
s-a &= 16.\ 57.\ 21 \\
s-b &= 72.\ 15.\ 3 \\
s-c &= 10.\ 18.\ 48 \\
\hline
& 199.\ 2.\ 24
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\sin(s-b) &= 9{,}9788195 \\
\log\sin(s-c) &= 9{,}2529286 \\
\hline
& 9{,}2317481 \\
\log\sin s &= 9{,}9939773 \\
\log\sin(s-a) &= 9{,}4648388 \\
\hline
& 9{,}4588161 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2 &= 9{,}7729320 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}8864660
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 37^0\,35'\,40'',90$$
$$\alpha = 75.\ 11.\ 21,8.$$

5.

$a = 82^0\,11'\,17''$	$\log \sin (s - b) = 9{,}62096$	
$b = 64.\ 19.\ 21$	$\log \sin (s - c) = 9{,}92600$	
$c = 31.\ 31.\ 30$	$9{,}54696$	
$2s = 178.\ 2.\ 8$	$\log \sin s = 9{,}99994$	
$s = 89.\ 1.\ 4$	$\log \sin (s - a) = 9{,}07525$	
$s - a = 6.\ 49.\ 47$	$9{,}07519$	
$s - b = 24.\ 41.\ 43$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha^2 = 0{,}47177$	
$s - c = 57.\ 29.\ 34$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = 0{,}23589$	
$178.\ 2.\ 8$		

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 59^0\,50'\,49'',7$$
$$\alpha = 119.\ 41.\ 39.$$

6.

$a = 20^0\,19'\,18''$	9,19973	$30^0\,30'\,25''$
$b = 21.\ 17.\ 51$	9,28863	$\alpha = 61.\ 0.\ 50.$
$c = 19.\ 12.\ 11$	8,48836	
60. 49. 20	9,70432	
30. 24. 40	9,24350	
10. 5. 22	8,94782	
9. 6. 49	9,54054	
11. 12. 29	9,77027	
60. 49. 0.		

γ) Für analytische Entwickelungen bedient man sich häufig besser der ursprünglichen Formel $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$. Zur Vergleichung für numerische Rechnungen sind im Folgenden die Beispiele 1. und 2. nach dieser Formel wiederholt.

7. $a = 25^0\,13'\,12''$; $b = 37^0\,14'\,9''$; $c = 58^0\,31'\,51''$.

$\log \cos a = 9{,}9564942$;	$\log \sin a = 9{,}6295065$
$\log \cos b = 9{,}9009958$;	$\log \sin b = 9{,}7818251$
$\log \cos c = 9{,}7177035$;	$\log \sin c = 9{,}9309089$
9,6186993	9,7127340
9,6741977	9,5604154
9,8574900	9,4113316
$\cos a = 0{,}9046784$;	$\cos b = 0{,}7961515$
$\cos b \,.\, \cos c = 0{,}4156228$;	$\cos a \,.\, \cos c = 0{,}4722780$
0,4890556	0,3238735
9,6893582	9,5103754
9,7127340	9,5604154
$\log \cos \alpha = 9{,}9766242$	$\log \cos \beta = 9{,}9499600$
$\alpha = 18^0\,37'\,50'',0$	$\beta = 26^0\,58'\,46'',20$

$$\cos c = 0{,}5220396$$
$$\cos a \,.\, \cos b = 0{,}7202612$$
$$-\,0{,}1982216$$
$$9{,}2971510\,n$$
$$9{,}4113316$$
$$\log\cos\gamma = 9{,}8858194\,n$$
$$\gamma = 140^0\;14'\;49'',95.$$

8.

$$a = 124^0\;12'\;31'';\; b = 54^0\;18'\;16'';\; c = 97^0\;12'\;25''.$$

$\log\cos a = 9{,}74990n$;	$\log\sin a = 9{,}91750$
$\log\cos b = 9{,}76603$;	$\log\sin b = 9{,}90962$
$\log\cos c = 9{,}09849n$;	$\log\sin c = 9{,}99656$
$8{,}86452\,n$	$9{,}90618$
$8{,}84839$	$9{,}91406$
$9{,}51593\,n$	$9{,}82712$

$\cos a = -0{,}562213$	$\cos b = 0{,}583486$	$\cos c = -0{,}125456$
$-0{,}073202$	$0{,}070533$	$-0{,}328043$
$-0{,}489011$	$0{,}512953$	$+0{,}202587$
$9{,}68932n$	$9{,}71008$	$9{,}30661$
$9{,}90618$	$9{,}91406$	$9{,}82712$
$\log\cos\alpha = 9{,}78314n$;	$\log\cos\beta = 9{,}79602$;	$\log\cos\gamma = 9{,}47949$
$\alpha = 127^0\;22'\;3'',7$;	$\beta = 51^0\,18'\,11'',1$;	$\gamma = 72^0 26' 37'',6.$

δ) Setzt man in der Formel γ) $\cos a = n \,.\, \sin b \,.\, \cos\varphi$, $\cos c = n \,.\, \sin\varphi$, also $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos c \,.\, \sin b}{\cos a}$, $n = \frac{\cos c}{\sin\varphi}$, so ist $\cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg} c \,.\, \sin(b-\varphi)}{\sin b \,.\, \sin\varphi}$.

9.

$$a = 55^0\;36'\;19'';\; b = 77^0\;12'\;17'';\; c = 63^0\;9'\;41''.$$

$\log\cos a = 9{,}7519647$	$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}7041355$
$\log\sin b = 9{,}9890792$	$9{,}9890792$
$\log\cos c = 9{,}6546375$	$9{,}7150563$
$9{,}6437167$	$\log\sin\varphi = 9{,}7886845$
$\log\operatorname{tg}\varphi = 9{,}8917520$	$9{,}9263718$
$\varphi = 37^0\;55'\;56'',34$	$\log\sin(b-\varphi) = 9{,}8014093$
$b - \varphi = 39.\;16.\;20{,}66$	$\log\cos\alpha = 9{,}7277811$
	$\alpha = 57^0 42'\;13'',99.$

10. $a = 42^0\,19'\,44''$; $b = 83^0\,44'\,19''$; $c = 65^0\,12'\,10''$.

$\log\cos a = 9{,}86882$
$\log\sin b = 9{,}99740$
$\log\cos c = 9{,}62263$
$9{,}62003$
$\log\operatorname{tang}\varphi = 9{,}75121$
$\varphi = 29^0\,25'\ 8'',3$
$b - \varphi = 54.\ 19.\ 10{,}7$

$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}66464$
$9{,}99740$
$9{,}66724$
$\log\sin\varphi = 9{,}69125$
$9{,}97599$
$\log\sin(b-\varphi) = 9{,}90971$
$\log\cos\alpha = 9{,}88570$
$\alpha = 39^0 46' 18''$.

	a	b	c	α	β	γ
11.	89⁰59′59″	88⁰58′58″	87⁰57′57″	90⁰ 2′ 9″,1	88⁰58′55″,8	87⁰57′55″,8
12.	120. 55. 35	59. 4. 25	106. 10. 22	116. 44. 48	63. 15. 12	91. 7. 18
13.	50. 12. 4	116. 44. 48	129. 11. 42	59. 4. 25	94. 23. 10	120. 4. 50
14.	131. 35. 4	108. 30. 14	84. 46. 34	132. 14. 20	110. 10. 40	99. 42. 24
15.	20. 16. 38	56. 19. 40	66. 20.44,1	20. 9. 54,6	55. 52. 30,2	114. 20. 16

b) Ein sphärisches Dreieck aus seinen drei Winkeln α, β, γ zu berechnen.

$$\alpha)\ \operatorname{cotg} r = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}};$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{cotg} r}{\cos(\sigma-\alpha)},\ \text{u. s. w.}$$

1.

$\alpha = 102^0\,14'\,12''$
$\beta = 54.\ 32.\ 24$
$\gamma = 89.\ 5.\ 46$
$2\sigma = 245.\ 52.\ 22$
$\sigma = 122.\ 56.\ 11$
$\sigma - \alpha = 20.\ 41.\ 59$
$\sigma - \beta = 68.\ 23.\ 47$
$\sigma - \gamma = 33.\ 50.\ 25$
$2\sigma = 245.\ 52.\ 22$

$\log\cos(\sigma-\alpha) = 9{,}9710186$
$\log\cos(\sigma-\beta) = 9{,}5660639$
$\log\cos(\sigma-\gamma) = 9{,}9193884$
$9{,}4564709$
$\log\cos\sigma = 9{,}7353653\,n$
$\log(\operatorname{cotg} r)^2 = 9{,}7211056$
$\log\operatorname{cotg} r = 9{,}8605528$

$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a = 9{,}8895342$
$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b = 0{,}2944889$
$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c = 9{,}9411644$
$\tfrac{1}{2}a = 52^0\,12'\,34'',06$
$\tfrac{1}{2}b = 26.\ 54.\ 42{,}44$
$\tfrac{1}{2}c = 48.\ 52.\ 9{,}22$
$a = 104.\ 25.\ 8{,}12$
$b = 53.\ 49.\ 24{,}88$
$c = 97.\ 44.\ 18{,}44$

2.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 20^0\ 9'\ 56''\\
\beta &= 55.\ 52.\ 32\\
\gamma &= 114.\ 20.\ 14\\
\hline
2\sigma &= 190.\ 22.\ 42\\
\hline
\sigma &= 95.\ 11.\ 21\\
\sigma-\alpha &= 75.\ \ 1.\ 25\\
\sigma-\beta &= 39.\ 18.\ 49\\
\sigma-\gamma &= -\ 19.\ \ 8.\ 53
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos(\sigma-\alpha) &= 9{,}41232\\
\log\cos(\sigma-\beta) &= 9{,}88857\\
\log\cos(\sigma-\gamma) &= 9{,}97528\\
\hline
&\ \ \ 9{,}27617\\
\log\cos\sigma &= 8{,}95638n\\
\hline
\log(\mathrm{cotg}\,r)^2 &= 0{,}31979\\
\log\mathrm{cotg}\,r &= 0{,}15990
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}a &= 0{,}74758\\
\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b &= 0{,}27133\\
\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}c &= 0{,}18462\\
\tfrac{1}{2}a &= 10^0\ 8'\ 18'',9\\
\tfrac{1}{2}b &= 28.\ \ 9.\ 50{,}4\\
\tfrac{1}{2}c &= 33.\ 10.\ 21{,}3\\
\hline
a &= 20.\ 16.\ 38\\
b &= 56.\ 19.\ 41\\
c &= 66.\ 20.\ 43.
\end{aligned}$$

β) $\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\dfrac{\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}}$ für einen Winkel.

3.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 220^0\\
\beta &= 130^0\\
\gamma &= 150^0\\
\hline
&\ \ 500\\
\hline
&\ \ 250\\
&\ \ \ 30\\
&\ \ 120\\
&\ \ 100\\
\hline
&\ \ 500.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&9{,}69897n\\
&9{,}23967n\\
\hline
&8{,}93864\\
\hline
&9{,}53405n\\
&9{,}93753\\
\hline
&9{,}47158n\\
\hline
&9{,}46706\\
&9{,}73353
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}a &= 61^0\,34'\ \ 6''\\
a &= 123.\ \ 8.\ 12
\end{aligned}$$

γ) $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\,.\,\cos\gamma}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}$; $\mathrm{tang}\,\varphi = \dfrac{\cos\gamma\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha}$;

$$\cos a = \frac{\mathrm{cotg}\,\gamma\,.\,\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta\,.\,\sin\varphi}.$$

4. $\alpha = 32^0\ 54'\ 28''$; $\beta = 146^0\ 58'\ 9''$; $\gamma = 24^0\ 54'\ 47''$.

$$\begin{aligned}
\log\cos\gamma &= 9{,}95758\\
\log\sin\beta &= 9{,}73647\\
\hline
&\ \ \ 9{,}69405\\
\log\cos\alpha &= 9{,}92404\\
\hline
\log\mathrm{tang}\,\varphi &= 9{,}77001
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\mathrm{cotg}\,\gamma &= 0{,}33305\\
&\ \ \ 9{,}73647\\
\hline
&\ \ \ 0{,}59658\\
\log\sin\varphi &= 9{,}70536\\
\hline
&\ \ \ 0{,}89122
\end{aligned}$$

$\varphi = 30^0\,29'\,30'',8$ $\log \sin(\beta + \varphi) = 8{,}64639$

$\beta + \varphi = 177.\ 27.\ 39{,}8$ $\log \cos a = 9{,}53761$

$a = 69^0\,49'\,42'',5.$

	α	β	γ	a	b	c
5.	130°	110°	80°	139°21′22″	126°57′52″	56°51′49″
6.	59°55′10″	85°36′50″	59°55′10″	129.11.40	63.15.12	129.11.40
7.	55.42. 7,5	45.44. 5,9	135.15.56,6	82.17. 4	59.12.16	122.24.31,3
8.	4.23.35,1	8.28.20,2	172.17.56,1	31. 9.13	84.18.28	115.10. 4
9.	110.49.32,3	109.16.52,4	87.35.25,5	113. 4. 9	111.42. 0	79.34.43

c) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel α zu berechnen.

α) mittelst der Gaussischen Formeln.

1.

$$b = 56^0\,19'\,40''$$
$$c = 20.\ 16.\ 38$$
$$\alpha = 114.\ 20.\ 16$$
$$\tfrac{1}{2}(b-c) = 18.\ 1.\ 31$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c) = 38.\ 18.\ 9$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 57.\ 10.\ 8$$

$\log\sin\tfrac{1}{2}(b-c) = 9{,}4905716$ $\log\sin\tfrac{1}{2}(b+c) = 9{,}7922609$

$\log\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}7341311$ $\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}9244201$

$\log\cos\tfrac{1}{2}(b-c) = 9{,}9781441$ $\log\cos\tfrac{1}{2}(b+c) = 9{,}8947309$

$9{,}2247027$ $9{,}7122752$

$9{,}7166810$ $9{,}8191510$

$\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}5080217$ $\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 9{,}8931242$

$\log\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}9785620$ $\log\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 9{,}8964129$

$\log\sin\tfrac{1}{2}a = 9{,}7381190$ $\log\cos\tfrac{1}{2}a = 9{,}9227381$

$$\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = 9{,}8153809$$

$\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = 17^0\,51'\,17'',80$ $\beta = 55^0\,52'\,30'',25$

$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 38.\ 1.\ 12{,}45$ $\gamma = 20.\ 9.\ 54{,}65$

$\tfrac{1}{2}a = 33.\ 10.\ 22{,}06$ $a = 66.\ 20.\ 44{,}12.$

Probe durch Aufschlagen von $\log\cos\tfrac{1}{2}a$ oder $\log\sin\tfrac{1}{2}a$ und Vergleichung.

2.

$$b = 70^0 20' 50''$$
$$c = 38.\ 28.\ 0$$
$$\alpha = 52.\ 30.\ 0$$
$$\tfrac{1}{2}(b-c) = 15.\ 56.\ 25$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c) = 54.\ 24.\ 25$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 26.\ 15.\ 0$$

$$\begin{array}{rlcrl}
\log\sin\frac{1}{2}(b-c) &= 9{,}43875 & & \log\sin\frac{1}{2}(b+c) &= 9{,}91018\\
\log\cos\frac{1}{2}\alpha &= 9{,}95273 & & \log\sin\frac{1}{2}\alpha &= 9{,}64571\\
\log\cos\frac{1}{2}(b-c) &= 9{,}98297 & & \log\cos\frac{1}{2}(b+c) &= 9{,}76494\\ \hline
 & 9{,}39148 & & & 9{,}93570\\
 & 9{,}55589 & & & 9{,}41065\\
\log\tang\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}83559 & & \log\tang\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 0{,}52505\\ \hline
\log\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}91650 & & \log\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}45642\\
\log\sin\frac{1}{2}a &= 9{,}63939 & & \log\cos\frac{1}{2}a &= 9{,}95423
\end{array}$$

$$\log\tang\tfrac{1}{2}a = 9{,}68516$$

$$\begin{array}{rlcrl}
\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 34^0\,24'\,17'',8 & & \beta &= 107^0\,47'\,3'',5\\
\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 73.\,22.\,45{,}7 & & \gamma &= 38.\,58.\,27{,}9\\
\frac{1}{2}a &= 25.\,50.\,35{,}5 & & a &= 51.\,41.\,11{,}0
\end{array}$$

β) Berechnung der fehlenden Winkel mittelst der Neper'schen Analogien.

3.
$$\begin{array}{rl}
b &= 73^0\,58'\,54''\\
c &= 38.\,45.\;\;0\\
\alpha &= 46.\,33.\,41\\ \hline
\frac{1}{2}(b-c) &= 17.\,36.\,57\\
\frac{1}{2}(b+c) &= 56.\,21.\,57\\
\frac{1}{2}\alpha &= 23.\,16.\,50{,}5
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcrl}
\log\cos\frac{1}{2}(b-c) &= 9{,}97914 & & \log\sin\frac{1}{2}(b-c) &= 9{,}48092\\
\log\cotg\frac{1}{2}\alpha &= 0{,}36626 & & & 0{,}36626\\ \hline
 & 0{,}34540 & & & 9{,}84718\\
\log\cos\frac{1}{2}(b+c) &= 9{,}74342 & & \log\sin\frac{1}{2}(b+c) &= 9{,}92044\\ \hline
\log\tang\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 0{,}60198 & & \log\tang\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}92674\\
\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 75^0\,57'\,40'',7 & & \beta &= 116^0\;\;9'\,6'',3\\
\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 40.\,11.\,25{,}6 & & \gamma &= 35.\,46.\,15{,}1
\end{array}$$

γ) $\cos a = \cos b\,.\,\cos c + \sin b\,.\,\sin c\,.\,\cos\alpha;$

$\tang\varphi = \frac{\cotg b}{\cos\alpha};\;\; \cos a = \frac{\cos b}{\sin\varphi}\sin(c+\varphi).$

$\cotg\beta = (\cotg b\,.\,\sin c - \cos\alpha\,.\,\cos c) : \sin\alpha;$

$\cotg\beta = -\frac{\cotg\alpha}{\cos\varphi}\cos(c+\varphi).$

4. $b = 40^0\,20'\,10''$; $c = 30^0\,41'\,18''$; $\alpha = 56^0\,0'\,50''$.

$$\begin{array}{rl}
\log\cotg b &= 0{,}07102\\
\log\cos\alpha &= 9{,}74740\\ \hline
\log\tang\varphi &= 0{,}32362\\
\varphi &= 64^0\,36'\,30''\\
c+\varphi &= 95.\,17.\,48
\end{array}$$

$$\begin{aligned} \log\cos b &= 9{,}88210 \\ \log\sin\varphi &= 9{,}95588 \\ &\ 9{,}92622 \\ \log\sin(c+\varphi) &= 9{,}99814 \\ \log\cos a &= 9{,}92436 \\ a &= 32^0\,50'\,36'',9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\operatorname{cotg}\alpha &= 9{,}82876 \\ \log\cos\varphi &= 9{,}63226 \\ &\ 0{,}19650 \\ \log\cos(c+\varphi) &= 8{,}96526\,n \\ \log\operatorname{cotg}\beta &= 9{,}16176 \\ \beta &= 81^0\,44'\,32'',3. \end{aligned}$$

5. Der Hilfswinkel φ in γ wird entbehrlich durch Zerlegung des zu berechnenden Dreiecks in zwei rechtwinkelige und Berechnung der letzteren. Welches ist hiernach die geometrische Bedeutung jenes Hilfswinkels?

	b	c	α	a	β	γ
6.	59° 12′ 16″	35° 37′ 17″,7	124° 17′ 52″,5	82° 17′ 4″	45° 44′ 5″,9	29° 2′ 55″,0
7.	88. 12. 20	124. 7. 17	50. 2. 1	59. 4. 25	63. 15. 12	132. 17. 59
8.	120. 55. 35	88. 12. 20	47. 42. 1	55. 52. 43	129. 57. 59	63. 15. 12
9.	63. 15. 12	47. 42. 1	59. 4. 25	50. 2. 1	88. 12. 20	55. 52. 43
10.	69. 25. 11	109. 46. 19	54. 54. 42	67. 12. 0	56. 11. 56	123. 21. 13

d) Ein sphärisches Dreieck aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln β, γ zu berechnen.

α) Durch die Gaussischen Formeln.

1.
$$\begin{aligned} a &= 66^0\ \ 0'\ 15'' \\ \beta &= 59.\ 17.\ 13 \\ \gamma &= 20.\ 41.\ 27 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 19.\ 17.\ 53 \\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 39.\ 59.\ 20 \\ \tfrac{1}{2}a &= 33.\ \ 0.\ \ 7{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}5191483 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}a &= 9{,}7361331 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}9748856 \\ \hline &\ 9{,}2552814 \\ &\ 9{,}7315482 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c) &= 9{,}5237332 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(b-c) &= 9{,}9770356 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}7545126 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}8079671 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}a &= 9{,}9235811 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}8843246 \\ \hline &\ 9{,}7110187 \\ &\ 9{,}8079057 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+c) &= 9{,}9031130 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(b+c) &= 9{,}8925691 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}9153366 \end{aligned}$$

$$\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}1608240$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(b-c) &= 18^0\,28'\ \ 7'',67 \\ \tfrac{1}{2}(b+c) &= 38.\ 39.\ 40{,}61 \\ \tfrac{1}{2}\alpha &= 55.\ 22.\ 26{,}98 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= 57^0\ \ 7'\ 48'',28 \\ c &= 20.\ 11.\ 32{,}94 \\ \alpha &= 110.\ 44.\ 53{,}96. \end{aligned}$$

Probe: Zu $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ schlage $\log\sin\frac{1}{2}\alpha$ auf und vergleiche mit dem obenstehenden Werth.

2.

$$\begin{aligned} a &= 100^0 \\ \beta &= 80^0 \\ \gamma &= 120^0 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) &= 20^0 \\ \tfrac{1}{2}(\gamma + \beta) &= 100^0 \\ \tfrac{1}{2} a &= 50^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) &= 9{,}53405 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}a &= 9{,}88425 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) &= 9{,}97299 \\ \hline & 9{,}41830 \\ & 9{,}80142 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}61688 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}96567 \\ \hline \log\cos\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}83575 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta) &= 9{,}99335 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}a &= 9{,}80807 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta) &= 9{,}23967n \\ \hline & 9{,}85724 \\ & 9{,}04774n \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b) &= 0{,}80950n \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(c+b) &= 9{,}18534n \\ \hline \log\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}86240 \end{aligned}$$

$$\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}02665$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(c-b) &= 22^0\,29'\,\,1'',7 \\ \tfrac{1}{2}(c+b) &= 98.\,48.\,50{,}7 \\ \tfrac{1}{2}\alpha &= 46.\,45.\,23{,}8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c &= 121^0\,17'\,52'',4 \\ b &= 76.\,19.\,49{,}0 \\ \alpha &= 93.\,30.\,47{,}6. \end{aligned}$$

β) Berechnung der fehlenden Seiten mittelst der Neper'schen Analogien.

3.

$$\begin{aligned} a &= 51^0\,41'\,14'' \\ \beta &= 107.\,47.\,\,7 \\ \gamma &= 38.\,58.\,27 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 34.\,24.\,20 \\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 73.\,22.\,47 \\ \tfrac{1}{2}a &= 25.\,50.\,37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}91648 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}45641 \\ \hline & 0{,}46007 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a &= 9{,}68517 \\ \hline \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+c) &= 0{,}14524 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}75208 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}98146 \\ \hline & 9{,}77062 \\ & 9{,}68517 \\ \hline \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c) &= 9{,}45579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(b+c) &= 54^0\,24'\,24'',4 \\ \tfrac{1}{2}(b-c) &= 15.\,56.\,25{,}6 \\ \hline b &= 70.\,20.\,50{,}0 \\ c &= 38.\,27.\,58{,}8. \end{aligned}$$

γ) Berechnung eines Stückes durch eine Fundamentalformel, bezw. Hilfswinkel, oder Zerlegung des Dreiecks in rechtwinkelige:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a;$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\cos a}; \quad \cos\alpha = \frac{\cos\gamma \,.\, \sin(\beta-\varphi)}{\sin\varphi};$$

$$\operatorname{cotg} c = \frac{\cos\beta \,.\, \cos a + \sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma}{\sin a}; \quad \operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi};$$

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\cos a}; \quad \operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \sin(\psi+\gamma)}{\sin\psi}.$$

Geometrische Bedeutung der Hilfswinkel!

4.

$$a = 51^0\ 2'\ 0''$$
$$\beta = 115.\ 9.\ 7$$
$$\gamma = 35.\ 46.\ 15$$

$$\log \operatorname{cotg}\gamma = 0{,}14241$$
$$\log \cos a = 9{,}79856$$
$$\log \operatorname{tang}\varphi = 0{,}34385$$
$$\varphi = 65^0\ 37'\ 37'',2$$
$$\beta - \varphi = 49.\ 31.\ 29{,}8$$

$$\log\cos\gamma = 9{,}90922$$
$$\log\sin(\beta-\varphi) = 9{,}88120$$
$$9{,}79042$$
$$\log\sin\varphi = 9{,}95846$$
$$\log\cos\alpha = 9{,}83096$$
$$\alpha = 47^0 20' 42'',6$$

$$\log\operatorname{cotg} a = 9{,}90785$$
$$\log\cos(\beta-\varphi) = 9{,}81233$$
$$9{,}72018$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}61561$$
$$\log\operatorname{cotg} c = 0{,}10457$$
$$c = 38^0\ 10'\ 4'',7.$$

	a	β	γ	b	c	α
5.	124°17′52″,5	120°47′44″	57°35′28″,7	134°15′54″,1	44°44′ 3″,4	97°42′56″
6.	154.46.48	26.58.46	39.45.10	37.14. 9	121.28. 9	161.22.10
7.	124.12.31	128.41.49	107.33.20	125.41.44	82.47.35	127.22. 7
8.	86.15.15	153.17. 6	87.43.36	152.43.52	88.12.19	78.15.41
9.	52.37.57	125.41.44	82.47.35	128.41.47	107.33.20	55.47.29

e) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten b, c und einem gegenüberliegenden Winkel γ zu berechnen.

α) Berechnung des anderen gegenüberliegenden Winkels durch den Sinussatz und Benutzung desselben zur Berechnung der übrigen Stücke mittelst der Gaussischen Formeln.

Weniger gut ist die Anwendung Neper'scher Analogien zu gleichem Zweck.

1.

$$b = 70^0\ 20'\ 50''$$
$$c = 51.\ 41.\ 14$$
$$\gamma = 52.\ 30.\ \ 0$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c) = 61.\ \ 1.\ \ 2$$
$$\tfrac{1}{2}(b-c) = \ \ 9.\ 19.\ 48$$

$\log \sin b = 9{,}9739347$
$\log \sin c = 9{,}8946694$
$0{,}0792653$
$\log \sin \gamma = 9{,}8994667$
$\log \sin \beta = 9{,}9787320$
$\beta_1 = 72^0\ 12'\ 53'',34$
$\beta_2 = 107.\ 47.\ \ 6{,}66$*)

$72^0\ 12'\ 53'',34$
$52.\ 30.\ \ 0$
$19.\ 42.\ 53{,}34$
$\tfrac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9.\ 51.\ 26{,}67$
$107.\ 47.\ \ 6{,}66$
$52.\ 30.\ \ 0$
$55.\ 17.\ \ 6{,}66$
$\tfrac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 27.\ 38.\ 33{,}33$

$\log \cos \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9{,}9935406$
$\log \sin \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \gamma) = 9{,}2334954$
$0{,}7600452$
$\log \tang \tfrac{1}{2}\alpha_1 = 0{,}0279915$
$\tfrac{1}{2}\alpha_1 = 46^0\ 50'\ 42'',58$
$9{,}8049215$
$9{,}9935406$
$\log \sin \tfrac{1}{2} a_1 = 9{,}8113809$
$9{,}0448763$
$9{,}2334954$
Probe: $9{,}8113809$
$\tfrac{1}{2} a_1 = 40^0\ 22'\ 9'',13$

$\log \sin \tfrac{1}{2}(b+c) = 9{,}9418915$
$\log \sin \tfrac{1}{2}(b-c) = 9{,}2098378$
$0{,}7320537$
$\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}8630300$
$\log \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}8350385$
$\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}5232167$
$\log \cos \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}9743815$

$\log \cos \tfrac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 9{,}9473646$
$\log \sin \tfrac{1}{2}(\beta_2 - \gamma) = 9{,}6664756$
$0{,}2808890$
$\log \tang \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}5488353$
$\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 19^0\ 29'\ 13'',18$
$9{,}4651082$
$9{,}9473646$
$\log \sin \tfrac{1}{2} a_2 = 9{,}5177436$
$9{,}1842193$
$9{,}6664756$
Probe: $9{,}5177437$
$\tfrac{1}{2} a_2 = 19^0\ 13'\ 59'',83$

*) Da $b + c < 180^0$, $\gamma < 90^0$, $c < b$, sind beide Winkel möglich.

$\alpha_1 = 93^0\,41'\,25'',2;\quad a_1 = 80^0\,44'\,18'',3;$

$\alpha_2 = 38.\,58.\,26{,}4;\quad a_2 = 38.\,27.\,59{,}7.$

J 2.

$$\begin{aligned} b &= 46^0\,42'\ \ 0'' \\ c &= 69.\,50.\ \ 0 \\ \gamma &= 32.\,54.\,28 \\ \hline \tfrac{1}{2}(c+b) &= 58.\,16.\ \ 0 \\ \tfrac{1}{2}(c-b) &= 11.\,34.\ \ 0 \end{aligned}$$

$\log\sin b = 9{,}86200$ | $24^0\,54'\,42'',2$

$\log\sin c = 9{,}97252$ | $32.\,54.\,28$

$9{,}88948$ | $57.\,49.\,10{,}2$

$\log\sin\gamma = 9{,}73503$ | $\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = 28.\,54.\,35{,}1$

$\log\sin\beta = 9{,}62451$

$\beta = 24^0\,54'\,42'',2$*)

$$\begin{aligned} \log\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}94220 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}68434 \\ \hline &\ \ \ 0{,}25786 \\ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha &= 0{,}52799 \\ \tfrac{1}{2}\alpha &= 73^0\,29'\,7'',7 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(c+b) &= 9{,}72096 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}99109 \\ \hline &\ \ \ 9{,}72987 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}98171 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}45371 \\ \hline &\ \ \ 9{,}70267;\ 9{,}44480 \\ &\ \ \ 9{,}94220;\ 9{,}68434 \\ \hline \log\cos\tfrac{1}{2}a &= 9{,}76047;\ 9{,}76046 \\ \tfrac{1}{2}a &= 54^0\,49'\,35'' \end{aligned}$$

$\alpha = 146^0\,58'\,15'';\quad a = 109^0\,39'\,10''.$

β) Berechnung von β, wie vorher. Man setze $\alpha + a = 4s$, $\alpha - a = 4d$, $\beta + b = 4s'$, $\beta - b = 4d'$, $\gamma + c = 4s''$, $\gamma - c = 4d''$, so ist:

$$\operatorname{tang}(45^0 - s)^2 = \operatorname{cotg}(s' - s'')\,.\,\operatorname{tang}(d' - d'') \times \operatorname{tang}(s' + s'')\,.\,\operatorname{tang}(d' + d''),$$

$$\operatorname{tang}(45^0 - d)^2 = \operatorname{tang}(s' - s'')\,.\,\operatorname{cotg}(d' - d'') \times \operatorname{tang}(s' + s'')\,.\,\operatorname{tang}(d' + d'')$$

für $\beta < 90^0$, und für das andere Dreieck

*) Da $b + c < 180^0$, $\gamma < 90^0$, aber $c > b$, so ist nur ein Dreieck möglich, und wegen $\beta + \gamma < 180^0$ ist β spitz.

$$\text{tang}\, d^2 = \text{tang}(s'-s'') . \text{tang}(d'-d'') . \text{cotg}(s'+s'') . \text{tang}(d'+d''),$$
$$\text{tang}\, s^2 = \text{tang}(s'-s'') . \text{tang}(d'-d'') . \text{tang}(s'+s'') . \text{cotg}(d'+d'').$$

3. $b = 70^0\ 40'$ $\log \sin b = 9{,}97479$ $\beta_1 = 69^0\ 34'\ 30''$
$c = 40.\ 20$ $\log \sin c = 9{,}81106$ $\beta_2 = 110.\ 25.\ 30$
$\gamma = 40.\ 0$ $0{,}16373$ Vergl. e. 4.

$\log \sin \gamma = 9{,}80807$
$\log \sin \beta = 9{,}97180$

$4s' =$	$140^0\ 14'\ 30''$
$4d' =$	$-\ 1.\ 5.\ 30$
$4s'' =$	$80.\ 20.$
$4d'' =$	$-\ 0.\ 20.$
$s' =$	$35.\ 3.\ 37{,}5$
$d' =$	$-\ 0.\ 16.\ 22{,}5$
$s'' =$	$20.\ 5.$
$d'' =$	$-\ 0.\ 5.$
$s'-s'' =$	$14.\ 58.\ 37{,}5$
$d'-d'' =$	$-\ 0.\ 11.\ 22{,}5$
$s'+s'' =$	$55.\ 8.\ 37{,}5$
$d'+d'' =$	$-\ 0.\ 21.\ 22{,}5$

$\log \text{tang}\,(s'-s'')$	$= 9{,}42736$	$45^0 - s$	$= 0^0\ 36'\ 7'',4$
$\log \text{tang}\,(d'-d'')$	$= 7{,}51968n$	$45^0 - d$	$= 40.\ 21.\ 2{,}4$
$\log \text{tang}\,(s'+s'')$	$= 0{,}15710$	$90^0 - 2s$	$= 1.\ 12.\ 14{,}8$
$\log \text{tang}\,(d'+d'')$	$= 7{,}79364n$	$90^0 - 2d$	$= 80.\ 42.\ 4{,}8$
$\log \text{tang}\,(45^0-s)^2$	$= 6{,}04306$	$2s$	$= 88.\ 47.\ 45{,}2$
$\log \text{tang}\,(45^0-d)^2$	$= 9{,}85842$	$2d$	$= 9.\ 17.\ 55{,}2$
$\log \text{tang}\, d^2$	$= 4{,}58358$	α_1	$= 98.\ 5.\ 40$
$\log \text{tang}\, s^2$	$= 9{,}31050$	a_1	$= 79.\ 29.\ 50$
	$8{,}02153$	oder d	$= 0.\ 6.\ 43{,}8$
	$9{,}92921$	s	$= 24.\ 19.\ 42{,}5$
	$7{,}29179$	$2d$	$= 0.\ 13.\ 27{,}6$
	$9{,}65525$	$2s$	$= 48.\ 39.\ 25{,}0$
		α_2	$= 48.\ 52.\ 53$
		a_2	$= 48.\ 25.\ 57.$

γ) Wird β durch seinen Sinus nicht genau bestimmt, so kann man sich der folgenden Gleichung bedienen:

$$\sin c . \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = \cos \tfrac{1}{2}(c+b) . \sin \tfrac{1}{2}(c-b) + \sin b . \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma)^2.$$

4.

$$b = 70^0\,40'$$
$$c = 40.\ 20$$
$$\gamma = 40.\ \ 0$$
$$\tfrac{1}{2}(c+b) = 55^0\,30'$$
$$\tfrac{1}{2}(c-b) = -\ 15.\ 10$$
$$45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma = 25.\ \ 0$$
$$\log\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) = 9{,}62595$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(c+b) = 9{,}75313$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(c-b) = 9{,}41768\,n$$
$$9{,}17081\,n$$
$$-\ 0{,}148186$$
$$+\ 0{,}168535$$
$$+\ 0{,}020349$$
$$8{,}30854$$
$$9{,}81106$$
$$8{,}49748$$

$$\log\sin b = 9{,}97479$$
$$9{,}25190$$
$$9{,}22669$$
$$\log\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = 9{,}24874$$
$$45^0 - \tfrac{1}{2}\beta = 10^0\,12'\,48''$$
$$90^0 - \beta = 20.\ 25.\ 36$$
$$\beta_1 = 69.\ 34.\ 24$$

δ) Berechnung einzelner Stücke:

$$\sin\beta = \sin b \,.\, \sin\gamma : \sin c;$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \cos b : \operatorname{cotg}\gamma; \quad \sin(\alpha+\varphi) = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotg} c \,.\, \sin\varphi;$$
$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{cotg} b : \cos\gamma; \quad \sin(a+\psi) = \sin\psi \,.\, \cos c : \cos b.$$

5.

$$b = 40^0 \qquad \log\sin b = 9{,}80807$$
$$c = 50^0 \qquad \text{cp.}\log\sin c = 0{,}11575$$
$$\gamma = 80^0 \qquad \log\sin\gamma = 9{,}99335$$
$$\log\sin\beta = 9{,}91717$$
$$\beta = 55^0\,43'\,36'',9$$

$$\log\cos b = 9{,}88425$$
$$\log\operatorname{cotg}\gamma = 9{,}24632$$
$$\log\operatorname{tang}\varphi = 0{,}63793$$
$$\varphi = 77^0\,2'\,14'',4$$
$$\log\operatorname{tang} b = 9{,}92381$$
$$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}92381$$
$$\log\sin\varphi = 9{,}98879$$
$$\log\sin(\alpha+\varphi) = 9{,}83641$$
$$\alpha+\varphi = 136^0\,40'\,30'',4$$
$$\alpha = 59.\,38.\,16{,}0$$

$$\log\operatorname{cotg} b = 0{,}07619$$
$$\log\cos\gamma = 9{,}23967$$
$$\log\operatorname{tang}\psi = 0{,}83652$$
$$\psi = 81^0\,42'\,35'',7$$
$$\log\sin\psi = 9{,}99544$$
$$\log\cos c = 9{,}80807$$
$$\text{cp.}\log\cos b = 0{,}11575$$
$$\log\sin(a+\psi) = 9{,}91926$$
$$a+\psi = 123^0\,51'\,53'',3$$
$$a = 42.\ 9.\,17{,}6.$$

	b	c	γ	β	a	α
6.	120° 55′ 35″	73°49′ 38″	88°52′ 42″	116°44′ 48″	120°55′ 35″	116° 44′ 48″
7.	134. 15. 54,1	150. 57. 5,0	144. 22. 42,3	120. 47. 44,0	55. 42. 7,5	97. 42. 55,0
				59. 12. 16,0	23. 57. 29,4	29. 9. 9,4
8.	56. 19. 40	20. 16. 38	20. 9. 54,7	55. 52 30,3	42. 55. 34,8	42. 38. 40,8
				124. 7. 29,7	66. 20. 43,5	114. 20. 15,9
9.	82. 17. 4,0	79. 0. 54,5	82. 9. 25,8	90. 0. 0,0	45. 12. 19,0	45. 44. 5,9
10.	31. 9. 16,0	30. 52. 36,6	87. 34. 12,0	unmöglich.	—	—

f) Ein sphärisches Dreieck aus zwei Winkeln β, γ und einer der gegenüberliegenden Seiten, c zu berechnen.

α) Berechnung der anderen gegenüberliegenden Seite durch den Sinussatz und Benutzung derselben zur Bestimmung der übrigen Stücke mittelst der Gaussischen Formeln.

1.
$$\beta = 107^0\,47'\,\,7'' \qquad \gamma = 52.\,30.\,0 \qquad c = 51.\,41.\,14$$

$$\log\sin c = 9{,}8946694$$
$$\text{cp. } \log\sin\gamma = 0{,}1005333$$
$$\log\sin\beta = 9{,}9787318$$
$$\log\sin b = 9{,}9739345$$
$$b_1 = 70^0 20' 49'',76\text{*)};$$
$$b_2 = 109.\,39.\,10{,}24.$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(b_1 - c) = 9{,}9942164 \qquad \log\cos\tfrac{1}{2}(b_2 - c) = 9{,}9418915$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(b_1 - c) = 9{,}2098363 \qquad \log\sin\tfrac{1}{2}(b_2 - c) = 9{,}6853361$$
$$0{,}7843801 \qquad 0{,}2565554$$
$$9{,}9685981 \qquad 9{,}8049218$$
$$9{,}1842180 \qquad 9{,}5483664$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}9743817 \qquad \log\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 9{,}8630303$$
$$\text{Probe: } 9{,}9743817 \qquad \text{Probe: } 9{,}8630303$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha_1 = 19^0\,29'\,12'',88 \qquad \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 43^0\,\,9'\,17'',27$$
$$\alpha_1 = 38.\,58.\,25{,}76 \qquad \alpha_2 = 86.\,18.\,34{,}54$$
$$a_1 = 38.\,27.\,59{,}02 \qquad a_2 = 99.\,15.\,41{,}58$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = 9{,}9935407 \qquad \log\cos\tfrac{1}{2}a_1 = 9{,}9750574$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{,}6664762 \qquad \log\sin\tfrac{1}{2}a_1 = 9{,}5177418$$
$$0{,}3270645 \qquad \log\cos\tfrac{1}{2}a_2 = 9{,}8113811$$
$$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a_1 = 0{,}4573156 \qquad \log\sin\tfrac{1}{2}a_2 = 9{,}8818902$$
$$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a_2 = 9{,}9294909$$
$$\tfrac{1}{2}a_1 = 19^0\,13'\,59'',51$$
$$\tfrac{1}{2}a_2 = 49.\,37.\,50{,}79.$$

*) Da $\beta + \gamma < 180^0$, $\gamma < \beta$, $c < 90^0$, so sind zwei Dreiecke möglich.

2.

$$\begin{aligned}
\beta &= 35^0\,46'\,15''\\
\gamma &= 46.\ 33.\ 41\\
c &= 51.\ \ 2.\ \ 0\\
\hline
\log\sin c &= 9{,}89071\\
\text{cp.}\ \log\sin\gamma &= 0{,}13900\\
\log\sin\beta &= 9{,}76682\\
\log\sin b &= 9{,}79653\\
b &= 38^0\,45'\,3'',7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}99750\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(c-b) &= 9{,}02929\\
&\ 0{,}96821\ -\\
\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a &= 0{,}12307\\
\tfrac{1}{2}a &= 36^0\,59'\,18'',6\\
\log\cos\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}72330\\
\text{Probe:}&\ \ 9{,}72331\\
\tfrac{1}{2}\alpha &= 58^0\ \ 4'\,30''\\
a &= 73.\ 58.\ 37{,}2\\
\alpha &= 116.\ \ 9.\ \ 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta) &= 9{,}81839\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) &= 8{,}97325\\
&\ 0{,}84514\\
\log\cos\tfrac{1}{2}a &= 9{,}90241\\
\log\sin\tfrac{1}{2}a &= 9{,}77935\\
\hline
&\ 9{,}72080\\
&\ 8{,}75260
\end{aligned}$$

Andere Methode der Rechnung, reciprok zu e) β. Wird b durch den Sinus nicht genau bestimmt, so kann man sich der zu e) γ, polaren Gleichung bedienen.

β) Berechnung einzelner Stücke; b wie vorher.

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos\beta : \operatorname{cotg} c;\quad \sin(\alpha-\varphi) = \operatorname{tang}\beta\,.\,\operatorname{cotg}\gamma\,.\,\sin\varphi;$$

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{cotg}\beta : \cos c;\quad \sin(\alpha-\psi) = \cos\gamma\,.\,\sin\psi : \cos\beta.$$

3.

$$\begin{aligned}
\beta &= 24^0\,54'\,47''\\
\gamma &= 32.\ 54.\ 28\\
c &= 69.\ 50.\ \ 0\\
\hline
\log\sin c &= 9{,}97252\\
\text{cp.}\ \log\sin\gamma &= 0{,}26497\\
\log\sin\beta &= 9{,}62453\\
\log\sin b &= 9{,}86202\\
b &= 46^0\,42'\,11'',1
\end{aligned}$$

$\log\cos\beta = 9{,}95758$	$\log\operatorname{cotg}\beta = 0{,}33305$
$\log\operatorname{cotg} c = 9{,}56498$	$\log\cos c = 9{,}53751$
$\log\operatorname{tang}\varphi = 0{,}39260$	$\log\operatorname{tang}\psi = 0{,}79554$
$\varphi = 67^0\ 57'\ 16'',7$	$\psi = 80^0\ 54'\ 9'',6$
$\log\operatorname{tang}\beta = 9{,}66695$	$\log\cos\gamma = 9{,}92404$
$\log\operatorname{cotg}\gamma = 0{,}18901$	$\log\sin\psi = 9{,}99450$
$\log\sin\varphi = 9{,}96702$	$\text{cp.}\log\cos\beta = 0{,}04242$
$\log\sin(a-\varphi) = 9{,}82298$	$\log\sin(\alpha-\psi) = 9{,}96096$
$a - \varphi = 41^0\ 42'\ 4'',4$	$\alpha - \psi = 66^0\ 4'10''$
$a = 109.\ 39.\ 21{,}1$	$\alpha = 146.58.19{,}6.$

	β	γ	c	b	a	α
4.	123°40′20″,0	159°43′22″,0	159°50′ 5″,3	124° 7′29″,7	137° 4′25″,2	137°21′19″,2
				55.52.30,3	113.39.16,5	65.39.44,1
5.	133.18. 0	110.10. 0	147. 5.32	155. 5.17,8	33. 1.45	70.20.50
6.	123.40.18	113.39.21	65.39.46	124. 7.28	159.50. 4	159.43.20
7.	98.30.28	100. 2.11,3	95.20.38,7	90. 0. 0	147.41.43	148. 5.35
8.	38. 0.12	24.33. 9	65.20.13	unmöglich.	—	—

§. 38. Berechnung des Flächeninhalts.

a) Gegeben: die drei Winkel.

1.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 102^0\ 14'\ 12'' \\
\beta &= 54.\ 32.\ 24 \\
\gamma &= 89.\ \ 5.\ 46 \\
\hline
&\quad 245.\ 52.\ 22 \\
e &= 65.\ 52.\ 22 \\
&= 237142'' \\
\log e &= 5{,}3750121 \\
\log \varrho &= 5{,}3144251 \\
&\quad 0{,}0605870 \\
F &= 1{,}14967\, r^2.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 20^0\ \ 9'\ 56'' \\
\beta &= 55.\ 52.\ 32 \\
\gamma &= 114.\ 20.\ 14 \\
\hline
&\quad 190.\ 22.\ 42 \\
e &= 10.\ 22.\ 42 \\
&= 37362''
\end{aligned}$$

$$\log e = 4{,}57243$$
$$\log \varrho = 5{,}31443$$
$$9{,}25800$$
$$F = 0{,}181133\, r^2.$$

	α	β	γ	e	F
3.	72° 19′ 13″	95° 44′ 38″	15° 9′ 12″	11583″	0,056155 r^2
4.	84. 20. 19	27. 22. 40	75. 33. 0	26159	0,126821 r^2
5.	31. 4. 10	102. 14. 33	84. 9. 17	134880	0,653914 r^2

b) Gegeben: die drei Seiten.

Man berechnet die Winkel nach §. 37 *a*, oder, wenn diese selbst nicht verlangt werden, den sphärischen Excess unmittelbar mittelst der Gleichung von l'Huilier:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{4} e^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-a) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-b) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-c).$$

1.

$$a = 133^0\, 26'\, 19''$$
$$b = 64.\ 50.\ 53$$
$$c = 144.\ 13.\ 45$$
$$2s = 342.\ 30.\ 57$$
$$s = 171.\ 15.\ 28{,}5$$
$$s - a = 37.\ 49.\ 9{,}5$$
$$s - b = 106.\ 24.\ 35{,}5$$
$$s - c = 27.\ 1.\ 43{,}5$$
$$342.\ 30.\ 57{,}0$$
$$\tfrac{1}{2} s = 85.\ 37.\ 44{,}25$$
$$\tfrac{1}{2}(s-a) = 18.\ 54.\ 34{,}75$$
$$\tfrac{1}{2}(s-b) = 53.\ 12.\ 17{,}75$$
$$\tfrac{1}{2}(s-c) = 13.\ 30.\ 51{,}75$$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s = 1{,}1166940$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-a) = 9{,}5347427$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-b) = 0{,}1261208$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s-c) = 9{,}3808335$$
$$0{,}1583910$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} e = 0{,}0791955$$
$$\tfrac{1}{4} e = 50^0\, 11'\, 43'',28$$
$$200.\ 46.\ 53{,}1.$$

2.

$$
\begin{aligned}
a &= 69^0\,25'\,11''\\
b &= 94.\ 23.\ 10\\
c &= 69.\ 59.\ \ 8\\
\hline
2s &= 233.\ 47.\ 29\\
\hline
s &= 116.\ 53.\ 44{,}5\\
s-a &= 47.\ 28.\ 33{,}5\\
s-b &= 22.\ 30.\ 34{,}5\\
s-c &= 46.\ 54.\ 36{,}5\\
\hline
& \ 233.\ 47.\ 29{,}0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}s &= 58^0\,26'\,52'',25 & \log\tang\tfrac{1}{2}s &= 0{,}21179\\
\tfrac{1}{2}(s-a) &= 23.\ 44.\ 16{,}75 & \log\tang\tfrac{1}{2}(s-a) &= 9{,}64322\\
\tfrac{1}{2}(s-b) &= 11.\ 15.\ 17{,}25 & \log\tang\tfrac{1}{2}(s-b) &= 9{,}29885\\
\tfrac{1}{2}(s-c) &= 23.\ 27.\ 18{,}25 & \log\tang\tfrac{1}{2}(s-c) &= 9{,}63737\\
&& &\ 8{,}79123\\
&& \log\tang\tfrac{1}{4}e &= 9{,}39562\\
&& \tfrac{1}{4}e &= 13^0\,57'\,51'',7\\
&& e &= 55.\ 51.\ 27.
\end{aligned}
$$

	a	b	c	e
3.	65⁰ 39′ 44″,0	124⁰ 7′ 29″,8	159⁰ 40′ 5″,4	216⁰ 18′ 4″
4.	127. 30. 0,0	72. 12. 56,5	141. 1. 32,1	199. 30. 6
5.	69. 15. 6,0	120. 42. 47,0	159. 18. 33,0	216. 40. 23

c) Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

$$\tang\tfrac{1}{2}e = \frac{\tang\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}b + \tang\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\cos\gamma};\quad \tang\varphi = \tang\tfrac{1}{2}a\,.\cos\gamma,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}e = \frac{\tang\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos\varphi}{\cos(\varphi-\frac{1}{2}b)}.$$

1.

$$
\begin{aligned}
a &= 93^0\,41'\,25'',5\\
b &= 72.\ 12.\ 53{,}0\\
\gamma &= 128.\ 18.\ 46{,}0\\
\hline
\tfrac{1}{2}a &= 46.\ 50.\ 42{,}75\\
\tfrac{1}{2}b &= 36.\ \ 6.\ 26{,}5\\
\log\tang\tfrac{1}{2}a &= 0{,}02800\\
\log\cos\gamma &= 9{,}79236\,n\\
\log\tang\varphi &= 9{,}82036\,n\\
\varphi &= 146^0\,31'\,32'',3\\
\varphi-\tfrac{1}{2}b &= 110.\ 25.\ \ 5{,}8
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a &= 0{,}02800 \\
\log \sin \tfrac{1}{2} b &= 9{,}77033 \\
\log \sin \gamma &= 9{,}89467 \\
\log \cos \varphi &= 9{,}92123 n \\
\text{cp.} \log \cos (\varphi - \tfrac{1}{2} b) &= 0{,}45734 n \\
\hline
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} e &= 0{,}07157 \\
\tfrac{1}{2} e &= 49^0\, 42'\, 0'' \\
e &= 99^0\, 24'.
\end{aligned}$$

	a	b	γ	e
2.	86° 29′ 12″,4	100° 0′ 0″,0	58° 42′ 7″,6	62° 22′ 17″
3.	86. 18. 34,8	107. 47. 6,7	128. 18. 46,0	157. 13. 31
4.	33. 1. 45,0	155. 5. 17,8	110. 10. 0,0	133. 48. 55

Anmerkung. Kürzer als durch dieses Verfahren berechnet man e, indem man zunächst $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ durch eine der Neper'schen Analogien bestimmt.

d) Sonstige Fälle. Vermischte Aufgaben über den Flächeninhalt.

1. Sind a, b die Katheten eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks, so ist $\operatorname{tang} \frac{1}{2} e = \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$.

2. Sind a, b die gleichen Seiten eines gleichschenkeligen sphärischen Dreiecks, so ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} \tfrac{1}{4} e &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s - a) \,.\, \sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s - c)} \\
&= \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} c \,.\, \sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + \tfrac{1}{2} c) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - \tfrac{1}{2} c)}\,.
\end{aligned}$$

3. Im gleichseitigen sphärischen Dreieck ist

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{4} e = \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} a \sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{3}{4} a \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} a}\,.$$

4. Ist der sphärische Excess e (z. B. durch die Gleichung b dieses §.) bekannt, so kann man die Winkel des Dreiecks aus den Seiten desselben mittelst der folgenden Formel berechnen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \tfrac{1}{2} e)^2 = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} s \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (s - a) \times \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s - b) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s - c).$$

Diese Methode liefert zugleich eine Probe durch die Summe der vier Stücke $\frac{1}{4} e$, $\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2} e)$, $\frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{2} e)$, $\frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2} e)$, welche gleich 90^0 sein muss.

5. Man berechne den sphärischen Excess eines Dreiecks auf der Oberfläche der als Kugel gedachten Erde, wenn jede Seite desselben **a)** 1, **b)** 5, **c)** 15 Meilen lang ist. Erdumfang 5400 Meilen.

6. Das Festland von Asien kann nahezu als ein gleichseitiges Dreieck angesehen werden, indem die Vorgebirge Baba, Ostcap und Cap Buro je circa 1200 geographische Meilen von einander entfernt sind. Wieviel Quadratmeilen würde dieses Dreieck haben, wenn man dasselbe als ebenes berechnen dürfte, und wieviel, wenn man es als Dreieck auf der Erdkugel berechnet, deren Radius gleich 860 Meilen angenommen ist?

7. Nach einem Satze von Legendre kann man ein (kleineres) geodätisches Dreieck als ein ebenes berechnen, wenn man jeden Winkel des ersteren um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert und die Differenzen als die Winkel des ebenen Dreiecks annimmt. Man vergleiche die Winkel, welche man nach dieser Regel aus einem sphärischen Dreieck erhält, dessen Seiten bezüglich 25, 35 und 45 Meilen betragen, mit denjenigen, welche man aus diesen Seiten erhält, wenn das Dreieck von vorne herein als ein ebenes berechnet wird.

§. 39. Formeln und Lehrsätze.

1. $\sin \alpha^2 = \frac{4}{\sin b^2 \,.\, \sin c^2} \sin s \,.\, \sin (s - a) \,.\, \sin (s - b) \,.\, \sin (s - c)$.

2. $\sin a^2 = - \frac{4}{\sin \beta^2 \,.\, \sin \gamma^2} \cos \sigma \,.\, \cos (\sigma - \alpha) \,.\, \cos (\sigma - \beta) \,.\, \cos (\sigma - \gamma)$.

3. $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin \gamma \,.\, \operatorname{cotg} \alpha$.

4. $\frac{\cos a}{\cos b \,.\, \cos c} = \frac{1 - \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{tang} c \,.\, \cos \beta \,.\, \cos \gamma}{1 - \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma}$.

5. $\cos a \,.\, \sin c = \sin a \,.\, \cos c \,.\, \cos \beta + \sin b \,.\, \cos \alpha$.

6. $2 \,.\, \cos \frac{1}{2} (a + b) \,.\, \cos \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \sin b \,.\, \cos \alpha + \sin a \,.\, \cos \beta$.

7. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha - a) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\beta + b) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\beta - b) \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha + a)$.

8. $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin b \,.\, \sin \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \beta + \sqrt{\sin \beta^2 - \sin b^2 \,.\, \sin \alpha^2}$.

9. $\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2a + \cos 2b = \cos 2\alpha \,.\, \cos 2b - \cos 2a : \cos 2\beta$.

10. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \sin (s - c) : \sin s$.

11. $\tang \frac{1}{2} \alpha \,.\, \cotg \frac{1}{2} \beta = \sin(s - b) : \sin(s - a).$

12. $\sin s \,.\, \sin(s - a) + \sin(s - b) \,.\, \sin(s - c) = \sin b \,.\, \sin c.$

13. $\sin a^2 \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma = 4 \,.\, \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, \sin s \,.\, \sin(s - a).$

14. $\tang \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \tang \frac{1}{2}(\beta - \gamma) =$
$2 \cotg \frac{1}{2} \alpha \,.\, \sin b : \sin(b + c).$

15. $\tang \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - \tang \frac{1}{2}(\beta - \gamma) =$
$2 \,.\, \cotg \frac{1}{2} \alpha \,.\, \sin c : \sin(b + c).$

16. $\sin \alpha : \sin a =$
$\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c} : (\sin a \sin b \sin c).$

17. $\tang \frac{1}{2}(a + b) : \tang \frac{1}{2}(a - b) =$
$\tang \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tang \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

18. $\cos a \,.\, \tang \beta + \cos b \,.\, \tang \alpha + \tang \gamma =$
$\cos a \,.\, \cos b \,.\, \tang \alpha \,.\, \tang \beta \,.\, \tang \gamma.$

19. $\sin a \,.\, \sin b + \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos \gamma =$
$\sin \alpha \,.\, \sin \beta - \cos \alpha \,.\, \cos \beta \cos \gamma.$ (Cagnoli'sche Gl.)

20. $\tang [45^0 - \frac{1}{4}(\alpha + a)] \,.\, \cotg [45^0 - \frac{1}{4}(\alpha - a)] =$
$\cotg [\frac{1}{4}(\beta + b) - \frac{1}{4}(\gamma + c)] \,.\, \tang [\frac{1}{4}(\beta - b) - \frac{1}{4}(\gamma - c)].$

21. $\tang [45^0 - \frac{1}{4}(\alpha + a)] \,.\, \tang [45^0 - \frac{1}{4}(\alpha - a)] =$
$\tang [\frac{1}{4}(\beta + b) + \frac{1}{4}(\gamma + c)] \,.\, \tang [\frac{1}{4}(\beta - b) + \frac{1}{4}(\gamma - c)].$

22. $\tang \frac{1}{4} e \,.\, \cotg \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2} e) = \tang \frac{1}{2} s \,.\, \tang \frac{1}{2}(s - a).$

23. $\tang \frac{1}{4} e \,.\, \tang \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2} e) =$
$\tang \frac{1}{2}(s - b) \,.\, \tang \frac{1}{2}(s - c).$

§. 40. Rechnung mit anderweiten Stücken.

1. Den sphärischen Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises aus den drei Winkeln des letzteren zu berechnen. Vergl. §. 36, 8.

2. Ebenso für dieselben Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der bezüglich den Seiten a, b, c des ersteren Dreiecks anliegenden Nebendreiecke desselben.

3. Den sphärischen Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises aus den Winkeln desselben zu bestimmen.

Anleitung: Der Pol des umbeschriebenen Kreises fällt mit dem Pol des dem Polardreieck einbeschriebenen Kreises zusammen. Vergl. §. 36, 8.

4. Ebenso dieselben Radien r_1, r_2, r_3 für die bezüglich den Seiten a, b, c des ersteren anliegenden Nebendreiecke.

5. Die sphärischen Radien der umbeschriebenen Kreise (A. 3 und 4) aus den Seiten des ursprünglichen Dreiecks zu berechnen.

6. Aus den Resultaten der vorstehenden Aufgaben lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

a) $\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 = \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3$,
$\operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 = \operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_3$.

Noch vier ähnliche Gleichungen!

b) $\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3 =$
$\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3$.

c) $\operatorname{tang} r + \operatorname{cotg} \varrho = \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{cotg} \varrho_1 =$
$\frac{1}{2} (\operatorname{tang} r + \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3) =$
$\frac{1}{2} (\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3)$.

d) $\operatorname{tang} r = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 + \operatorname{cotg} \varrho_3 - \operatorname{cotg} \varrho)$,
$\operatorname{cotg} \varrho = \frac{1}{2} (\operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_3 - \operatorname{tang} r)$.

Noch sechs ähnliche Gleichungen!

e) $\operatorname{tang} r \,.\, \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 \,.\, \operatorname{tang} r_3 =$
$\operatorname{cotg} \varrho \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_1 + \operatorname{cotg} \varrho_2 \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_3$.

Zwei ähnliche Gleichungen!

f) $\operatorname{tang} r \,.\, \operatorname{tang} r_1 \,.\, \operatorname{tang} r_2 \,.\, \operatorname{tang} r_3 =$
$$\frac{\sin a^2 \,.\, \sin b^2 \,.\, \sin c^2}{4 \sin s^2 \,.\, \sin (s-a)^2 \,.\, \sin (s-b)^2 \,.\, \sin (s-c)^2},$$
$\operatorname{cotg} \varrho \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_1 \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_2 \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_3 =$
$$\frac{1}{\sin s \,.\, \sin (s-a) \,.\, \sin (s-b) \,.\, \sin (s-c)}.$$

g) $\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r_2 \operatorname{tang} r_3 \operatorname{cotg} \varrho \operatorname{cotg} \varrho_1 \operatorname{cotg} \varrho_2 \operatorname{cotg} \varrho_3$ $= \frac{1}{4} (\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_1 + \operatorname{tang} r_2 \operatorname{tang} r_3)(\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_2 + \operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r_3)$ $.\, (\operatorname{tang} r \,.\, \operatorname{tang} r_3 + \operatorname{tang} r_1 \,.\, \operatorname{tang} r_2)$ und ähnlich durch die Cotangenten der ϱ.

h) $\dfrac{\operatorname{tang} r \,.\, \operatorname{tang} r_1}{\operatorname{tang} r_2 \,.\, \operatorname{tang} r_3} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} a^2$; $\dfrac{\operatorname{cotg} \varrho \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_1}{\operatorname{cotg} \varrho_2 \,.\, \operatorname{cotg} \varrho_3} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} a^2$.

Vier ähnliche Gleichungen!

Ein sphärisches Dreieck zu berechnen, wenn gegeben sind:

7. Zwei Seiten und die Summe ihrer Gegenwinkel.

Entsprechende Aufgabe mit der Differenz der Winkel. Zwei reciproke Aufgaben mittelst des Polardreiecks. Auflösung durch Anwendung Neper'scher Analogien.

8. Die Summe zweier Seiten, die Summe ihrer Gegenwinkel und der dritte Winkel.

Drei ähnliche Aufgaben mit Benutzung der entsprechenden Differenzen. Vier polare Aufgaben. Anwendung Gaussischer Gleichungen.

9. Eine Seite, ihr Gegenwinkel und die Summe (Differenz) der beiden anderen Seiten.

Noch zwei entsprechende Aufgaben. Gaussische Gleichungen.

10. Der sphärische Radius des einbeschriebenen Kreises und zwei Winkel.

11. Der sphärische Radius des umbeschriebenen Kreises und zwei Seiten. Vergl. 3, 5, 10.

12. Der Umfang und zwei Winkel.

Entsprechend $b + c - a, \alpha, \beta$. Vergl. §. 39, 10—11.

13. Die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und ein dieser anliegender Winkel.

Entsprechend $a - b, \alpha, c$. Vergl. §. 39, 10—11.

14. Die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und der sphärische Excess.

Entsprechend $b - c, a, e$. Vergl. §. 39, 22—23.

15. Der Umfang, die Summe zweier Winkel und der dritte Winkel.

Entsprechend $b + c - a, \alpha, \beta + \gamma$. Vergl. §. 39, 22—23.

16. Von einem gleichseitigen sphärischen Dreieck sei der Winkel gegeben. Man berechne das Verhältniss seines Flächeninhalts zu dem Flächeninhalt desjenigen ebenen Dreiecks, dessen Seiten die zu den Seiten des ersteren gehörigen Sehnen sind.

17. Von einem sphärischen Dreieck seien die Winkel und der Kugelradius gegeben. Man berechne den Radius des Kreises, welcher demjenigen ebenen Dreieck umbeschrieben ist, dessen Seiten die zu den Seiten des ersteren gehörigen Sehnen sind.

18. Die Seiten eines sphärischen Dreiecks seien beziehungsweise doppelt so gross, als die Seiten eines zweiten; wie verhält sich die Tangente der Hälfte eines Winkels des ersteren Dreiecks zur Tangente der Hälfte des homologen Winkels des letzteren?

§. 41. Eingekleidete Aufgaben.

1. Das Volumen eines Parallelepipedon zu berechnen, wenn drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten desselben und die Winkel, welche sie mit einander bilden, gegeben sind.

Stereometrie.

2. In einer dreiseitigen Pyramide (einem Tetraëder) seien die Längen dreier an einem Eckpunkte zusammenstossender Kanten bezüglich durch a, b, c, die Längen der ihnen gegenüberliegenden Kanten entsprechend durch a_1, b_1, c_1, die Flächenwinkel entsprechend durch $\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bezeichnet. Man beweise die folgende Beziehungsgleichung zwischen den sechs Flächenwinkeln:

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha_1^2 - \cos\beta^2 - \cos\beta_1^2 - \cos\gamma^2 - \cos\gamma_1^2 +$$
$$\cos\alpha^2 . \cos\alpha_1^2 + \cos\beta^2 . \cos\beta_1^2 + \cos\gamma^2 . \cos\gamma_1^2 -$$
$$2\cos\alpha . \cos\alpha_1 . \cos\beta . \cos\beta_1 - 2\cos\beta . \cos\beta_1 . \cos\gamma . \cos\gamma_1 -$$
$$2\cos\gamma . \cos\gamma_1 . \cos\alpha . \cos\alpha_1 - 2\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma -$$
$$2\cos\alpha . \cos\beta_1 . \cos\gamma_1 - 2\cos\alpha_1 . \cos\beta . \cos\gamma_1 -$$
$$2\cos\alpha_1 . \cos\beta_1 . \cos\gamma = 0.$$

Anleitung: Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel ist Scheitelpunkt von vier Polar-Ecken zu den Ecken des Tetraëders. Berechnung der Cosinus dreier Winkel dieser Ecken, deren Summe 180° ist. Vergl. Anh. 1, Aufg. 39.

3. Bezeichnen ferner (vergl. 2.) (aa_1), (bb_1), (cc_1) die Winkel je zweier einander gegenüberliegenden Kanten, welche durch Verschiebung jeder der Kanten a, b, c parallel mit sich selbst und bezüglich längs der Kante b, c, a entstehen, so ist

$$aa_1 \cos(aa_1) + bb_1 \cos(bb_1) + cc_1 \cos(cc_1) = 0.$$

Zum Beweise halbire man die Kanten des Tetraëders und verbinde die Halbirungspunkte durch gerade Linien.

4. Sind e, f, g bezüglich die Entfernungen der einander gegenüberliegenden Kanten aa_1, bb_1, cc_1, so ist

$$\frac{\operatorname{cotg}(aa_1)}{e} + \frac{\operatorname{cotg}(bb_1)}{f} + \frac{\operatorname{cotg}(cc_1)}{g} = 0.$$

Beweis aus 3 und dem Satze, dass das Volumen des Tetraëders gleich $\frac{1}{6}\, aa_1\, e \sin aa_1$ ist.

5. Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die Längen der drei von der Spitze ausgehenden Kanten und die an diesen liegenden Flächenwinkel. Man berechne die Grundkanten, die

übrigen Flächenwinkel, die Oberfläche und das Volumen des Körpers.

6. Von einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche durch ABC und deren Spitze durch D bezeichnet sei, kennt man die Flächenwinkel an AD, BD und AB, die ebenen Winkel BAD, ADB und die Kante DB. Man berechne die übrigen Flächenwinkel, sowie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.

7. Vier congruente Dreiecke, deren Seiten $a = 3{,}5$, $b = 4$, $c = 4{,}5$ gegeben sind, seien so zusammengestellt, dass sie ein Tetraëder einschliessen. Man berechne die Seiten und die Winkel einer Ecke desselben.

8. Von einem Tetraëder seien sämmtliche Kanten gemessen; man soll aus denselben die Seiten und die Winkel einer Ecke des Körpers berechnen. $AB = 3$, $BC = 2{,}75$, $AC = 2{,}5$, $AD = 2{,}25$, $BD = 2$, $CD = 1{,}75$. Gesucht die Ecke A. Siehe die Bezeichnung in 6.

9. Das Granatoëder oder Rhomben-Dodekaëder ist ein von zwölf congruenten Rhomben begrenzter Körper und hat sechs dreiseitige und acht vierseitige Ecken; je zwei aneinander liegende Flächen bilden einen Flächenwinkel von 120^0. Man berechne die Winkel eines der begrenzenden Rhomben und mittelst der Kante a des Körpers seine Oberfläche und sein Volumen.

10. Das Pyramiden-Oktaëder ist ein von 24 Flächen begrenzter Körper, welcher durch Aufsetzen von congruenten, geraden, dreiseitigen Pyramiden auf die Flächen eines regelmässigen Oktaëders entstanden gedacht werden kann. Man berechne aus der Länge a einer Kante des letzteren und der Länge b einer Seitenkante der Pyramiden die Neigungswinkel der aneinanderstossenden Flächen des Pyramiden-Oktaëders.

Prakt. Geometrie.

11. Es sei ein Winkel, welcher in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegt, gleich α gemessen, und man habe ausserdem die Neigungswinkel seiner Schenkel gegen den Horizont bezüglich gleich β und γ bestimmt; man soll den horizontalen Winkel der beiden Neigungsschenkel berechnen. (Reduction eines Winkels auf den Horizont.)

Umkehrung dieser Aufgabe.

12. Von zwei Orten A, B auf der Oberfläche der als Kugel mit dem Radius $r = 859{,}5$ geogr. Meilen gedachten Erde

seien die geographischen Breiten φ, φ' und die geogr. Längen l, l' bekannt; man berechne ihre kürzeste Entfernung, d. h. die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens des durch sie bestimmten grössten Kreises. ($1^0 = 15$ Meilen.)

Beispiele: a) Berlin $\varphi = 52^0\ 30'$, $l = +\ 11^0\ 3'$; Bonn $\varphi = 50^0\ 44'$, $l = 4^0\ 45'$ (östl. v. Paris). b) Wieviel beträgt die Ausdehnung Europas vom Cap St. Mathieu unter $48^0\ 19'\ 15''$ n. Br. und $12^0\ 53'$ ö. L. bis zum Südende des Ural in $48^0\ 50'$ n. Br. und $77^0\ 5'$ ö. L.? c) Frankfurt a. M. $\varphi = 50^0\ 7'$, $l = 6^0\ 16'$, Darmstadt $\varphi = 49^0\ 52'$, $l = 6^0\ 19'$.

13. Die kürzeste Entfernung zweier Orte auf der Erde ist nebst den geographischen Breiten beider bekannt. Wieviel beträgt der Unterschied ihrer geogr. Längen?

a) Die Entfernung zwischen Paris und Berlin (d. i. der betreffende grösste Kreisbogen) beträgt 118 Meilen, die geogr. Breite von Paris ist $48^0\ 50'\ 13''$, die von Berlin $52^0\ 30'\ 16''$. Wieviel beträgt die Differenz der Uhren an beiden Orten?

b) Die Sternwarte zu Greenwich liegt $2^0\ 20'\ 23''$ westl. von Paris unter $51^0\ 28'\ 38''$ n. Br. und ist von Neuyork, unter $40^0\ 42'\ 45''$ n. Br., um 794 Meilen auf dem grössten Kreisbogen entfernt. Man berechne hieraus die geogr. Länge von Neuyork.

14. Ein Schiff verlässt Catania in Sicilien ($37^0\ 30'$ n. Br., $12^0\ 40'$ ö. L.); nach welcher Himmelsgegend muss es segeln, um auf dem kürzesten Wege Alexandria ($31^0\ 13'$ n. Br., $33^0\ 8'$ ö. L.) zu erreichen?

15. Ein Schiff segelt von Bremerhafen ($53^0\ 33'$ n. Br., $6^0\ 15'$ ö. L.) in einem grössten Kreise unter einem Azimuthe von $130^0\ 39'\ 44'',9$ eine Strecke von 115,5 Meilen. Unter welcher geogr. Breite und Länge befindet es sich am Endpunkte dieses Weges? Das Azimuth wird von Süden (0^0) über Westen (90^0) und Norden (180^0) nach Osten (270^0) gezählt.

Astronomie.

16. Aus der Länge l und der Breite b eines Sterns seine Rectascension und seine Declination zu berechnen. Schiefe der Ekliptik $e = 23^0\ 27'\ 30''$; $l = 315^0$, $b = 51^0$.

17. Aus der Rectascension α und der Declination δ eines Sterns seine Länge und seine Breite zu berechnen. $\alpha = 67^0\ 40'\ 30''$, $\delta = +\ 16^0\ 8'\ 20''$, Schiefe der Ekliptik $23^0\ 27'\ 30''$.

18. Von einem Stern sei zu einer gewissen Zeit die Höhe h und das Azimuth α gemessen; auserdem sei die Declination δ desselben bekannt. Man soll den Stundenwinkel β des Sterns und die Polhöhe φ des Beobachtungsortes berechnen. $h = 22^0\,45'\,12''$, $\alpha = 50^0\,14'\,23''$, $\delta = +\,7^0\,54'$.

19. Aus der Declination δ der Sonne, ihrem Stundenwinkel w und ihrer Höhe h die Polhöhe des Beobachtungsortes zu berechnen. $\delta = +\,23^0\,27'\,28''$, $h = 18^0\,57'\,48''$, $w = 90^0$.

20. Die Höhe eines Sterns aus seinem Stundenwinkel w, seiner Declination δ und der Polhöhe φ des Ortes zu berechnen. $w = 28^0\,17'\,15$, $\delta = +\,38^0$, $\varphi = 52^0\,30'\,16''$. (Berlin.)

21. Aus der Polardistanz p eines Sterns, seiner Zenithdistanz z und der Polhöhe φ das Azimuth desselben zu berechnen. $p = 40^0\,47'\,20''$, $z = 15^0\,9'\,53''$, $\varphi = 49^0\,29'\,13'',7$.

22. Aus dem Azimuth α, dem Stundenwinkel w eines Sterns und der Polhöhe φ seine Declination zu berechnen. $\alpha = 41^0\,1'\,17''$, $w = 20^0$, $\varphi = 44^0\,50'\,14''$.

23. Die Höhe und das Azimuth eines Sterns aus seiner Polardistanz p, seinem Stundenwinkel w und der Polhöhe φ zu berechnen. $\varphi = 51^0\,19'\,20''$ (Cassel), $p = 67^0\,59'\,5''$, $w = 15^0\,8'\,12''$.

24. Aus der Polhöhe φ des Beobachtungsortes, der Höhe h und der Declination δ der Sonne die Zeit der Beobachtung zu bestimmen. $\varphi = 51^0\,31'\,47'',9$ (Göttingen), $h = 35^0\,14'\,27''$, $\delta = +\,21^0\,27'$.

Anmerkung. Wo in den vorstehenden Aufgaben die astronomische Strahlenbrechung auf die den Rechnungen zu Grunde zu legenden Zahlen einwirkt, wird der Einfluss derselben als durch Correction der gemessenen Grössen bereits berichtigt angenommen.

25. Die Zeit des scheinbaren Sonnen-Auf- und Untergangs zu berechnen, wenn die atmosphärische Strahlenbrechung am Horizont zu $r = 35'$ angenommen wird. Gegeben sind die Polhöhe des Orts und die Declination der Sonne.

26. Im Anschluss an 25. lässt sich der Zeitunterschied zwischen dem scheinbaren und dem wirklichen Sonnen-Aufgang suchen. Welches Resultat erhält man, wenn man den Sinus der kleinen Differenz der Stundenwinkel mit dem Bogen, den Sinus des arithmetischen Mittels derselben mit dem Sinus des Stunden-